

ZYGMUNT KOWALIK  
Polska Akademia Nauk  
Zakład Oceanologii, Instytut Geofizyki — Sopot

## METODY PROGNOZOWANIA ZMIAN POZIOMU MORZA ORAZ PRĄDÓW WYWOŁANYCH WIATREM

Treść: I — Podstawowe równania predykcji prądów oraz wezbrań sztormowych: 1. Hydrodynamiczne ujęcie metod predykcji 7, 2. Stochastyczne ujęcie metod predykcji 12, 2.1. Podstawowe charakterystyki stochastyczne 12, 2.2. Przekształcenia liniowe funkcji losowych — funkcja przenoszenia 15, 2.3. Estymacja niektórych charakterystyk losowych 19, 2.4. Uwagi o zastosowaniu rozkładów statystycznych w zagadnieniach predykcji zjawisk dynamicznych w morzu 22; II — Ustalone prądy pochodzenia wiatrowego w morzach płytkich: 1. Wstęp 23, 2. Równania Ekmana 25, 3. Równania wydatku objętościowego i funkcji prądu 26, 4. Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta w obszarze wielospójnym 28, 5. Stałe fizyczne w zagadnieniu ustalonych prądów wiatrowych 30, 6. Niektóre uproszczone modele 31, 6.1. Stała głębokość oraz silne zawirowanie wiatru 32, 6.2. Stała wartość naprężenia wiatru i niejednorodne dno 35, 6.3. Stała głębokość, silne zawirowania wiatru oraz obecność wyspy 38, 7. Ustalone prądy wiatrowe w Morzu Bałtyckim 40, 8. Ustalone prądy wiatrowe Zatoki Gdańskiej 46, 9. Niektóre zagadnienia matematyczne związane z równaniem wydatków objętościowych dla ustalonych prądów wiatrowych 53, 10. Niektóre rezultaty pomiarów prądów w Morzu Bałtyckim 57, 11. Planowanie pomiarów i ekspedycji oceanograficznych w celu badania prądów morskich 63, 12. Prądy gęstościowe w Bałtyku 64; III — Metody predykcji wahań poziomów morza: 1. Charakterystyka zmian poziomów 68, 2. Zasadnicze równania 68, 3. Tarcie przy powierzchni i dnie 69, 4. Postać różnicową równań 71, 5. Stabilność rozwiązań numerycznych 75, 6. Stabilność układu równań różnicowych 77, 7. Nieokresowe wahania poziomu wód Bałtyku odtworzone metodą hydrodynamiczno-numeryczną 82, 8. Badania nieokresowych zmian poziomu morza metodami stochastycznymi 85, 9. Okresowe wahania poziomu morza 87, 10. Sejsze Zatoki Gdańskiej 89, 10.1. Wstępne przygotowanie danych 90, 10.2. Widmowa gęstość zmian poziomów Zatoki Gdańskiej 91, 10.3. Próba wyjaśnienia przebiegu przestrzennego drgań sejszowych 93, 11. Okresowe wahania stanów wód u wybrzeży południowego Bałtyku 96, 11.1. Długookresowe oscylacje średnich rocznych stanów wody Morza Bałtyckiego 103, Summary 108, Literatura 109.

### Wstęp

Zasadniczym celem niniejszej publikacji jest przedstawienie metod predykcji przebiegu zjawiska prądów pochodzenia wiatrowego oraz we-



zbrań sztormowych. Prezentowane wyniki uzyskane zostały głównie przez autora niniejszego opracowania.

Wzajemne oddziaływanie morza i atmosfery prowadzi do zjawisk dynamicznych wywierających wpływ na środowisko człowieka, na budowle posadowione w strefie brzegowej, na warunki żeglugi oraz na procesy przenoszenia mas wodnych — ważne dla rybołówstwa — samooczyszczanie zbiorników wodnych itp.

Trzy rodzaje zjawisk, które zachodzą na powierzchni oraz pod powierzchnią morza są szczególnie ważne, a mianowicie: krótkookresowe falowanie wiatrowe, wezbrania sztormowe i towarzyszące im okresowe wahania wód oraz prądy pochodzenia wiatrowego przemieszczające masy wodne wraz z zawieszonymi w toni wodnej substancjami.

Przyczyny powstawania tych zjawisk są powszechnie znane i wynikają ze zmian ciśnienia atmosferycznego oraz wiatru wywołującego powstawanie sił stycznych do powierzchni morza. Jednak predykcja tych zjawisk z dokładnością wymaganą dla projektowań inżynierskich jest bardzo trudna. W obecnej publikacji główny nacisk położono na metody wynikające z równań ruchu cieczy, nie zaniedbano jednak pewnych metod statystycznych, które są szczególnie przydatne, jeżeli posiadamy już zbiór informacji o badanych zjawiskach.

Podstawą wszystkich metod predykcji dynamiki morza są prawa zachowania pędu wyrażone za pomocą równań ruchu oraz prawa zachowania masy wyrażone równaniem ciągłości. Zjawiska zachodzące w morzu są jednak dodatkowo skomplikowane tym, że dominują tutaj przepływy burzliwe.

Rozwiązanie równań ujmujących konkretne zjawisko w akwenach rzeczywistych odbywać się może tylko na podstawie metod numerycznych, a zatem niezbędne jest wprowadzanie maszyn cyfrowych. Toteż oprócz zjawisk hydrodynamicznych w publikacji zostały omówione zasady budowy algorytmów dla rozwiązania cząstkowych równań różniczkowych charakteryzujących wezbrania sztormowe i przepływy w morzu. Metody budowy prostych i uniwersalnych algorytmów podlegają obecnie intensywnemu rozwojowi i w przyszłości współpraca między hydrodynamiką, matematyką i cybernetyką doprowadzi do automatycznego programowania i wyboru odpowiednich algorytmów.

Przykłady i wyniki obliczeń przedstawionych w obecnej publikacji odnoszą się głównie do Morza Bałtyckiego i z powodzeniem mogą być zastosowane przy planowaniu praktycznych przedsięwzięć gospodarki morskiej na tym akwenie.



# I. PODSTAWOWE RÓWNANIA PREDYKCJI PRĄDÓW ORAZ WEZBRAŃ SZTORMOWYCH

## 1. HYDRODYNAMICZNE UJĘCIA METOD PREDYKCJI

W tej części pracy przyjęto zasadę, że wszelkie zmiany zachodzące w morzu pod wpływem czynników zewnętrznych mogą być wyjaśnione za pomocą równań hydrodynamiki, dlatego też rozwój zjawiska prądów oraz wezbrań sztormowych w czasie i przestrzeni opisano za pomocą równań hydrodynamiki przepływów burzliwych na wirującej ziemi:

$$\frac{\delta u}{\delta t} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} + k \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} + A \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + A \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\delta v}{\delta t} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} + k \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} + A \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + A \frac{\delta^2 v}{\delta y^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\delta w}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} + k \frac{\delta^2 w}{\delta z^2} + g + A \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + A \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}. \quad (1.3)$$

W powyższych równaniach przyjęto prostokątny układ współrzędnych  $x, y, z$ , przy czym osie te skierowano odpowiednio na wschód, północ i ku środkowi Ziemi, początek układu zaś związany jest z powierzchnią rozdziału między morzem i atmosferą. Składowe prędkości wzdłuż osi układu współrzędnych oznaczono:  $u, v, w$ .

Z pozostałych oznaczeń w równaniach ruchu występują:

$t$  — czas,  $f$  — parametr Coriolisa równy  $2 \omega \sin \varphi$ ,  $\omega$  — prędkość kątowa obrotu Ziemi dookoła własnej osi równa  $7,29 \cdot 10^{-5} \text{ sek}^{-1}$ ,  $\varphi$  — szerokość geograficzna,  $\rho$  — gęstość wody morskiej,  $p$  — ciśnienie,  $k$  — współczynnik lepkości burzliwej charakteryzujący wymianę pędu w kierunku pionowym,  $A$  — współczynnik lepkości burzliwej, charakteryzujący wymianę pędu w kierunku poziomym,  $g$  — przyspieszenie siły ciężkości.

Do równań ruchu dodamy równanie ciągłości dla cieczy nieściśliwej:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0. \quad (1.4)$$

Jako niewiadome w równaniach ruchu i ciągłości występują trzy składowe prędkości ( $u, v, w$ ) oraz ciśnienie ( $p$ ). Gęstość ( $\rho$ ) uważamy za znaną. Gdyby jednak wystąpiły procesy termodynamiczne zmieniające rozkład gęstości, to wtedy należy wprowadzić dodatkowe równanie ujmujące te zmiany. Sposób wyprowadzenia równań ruchu oraz ciągłości i poczynione przy tym uproszczenia przedstawione zostały przez Drueta i Kowalika (1971).



Przejdziemy teraz do ściślejszego sprecyzowania interesujących nas zjawisk, a tym samym do wydzielenia uproszczonego układu równań z układu ogólnego przedstawionego powyżej. Równania opisujące prądy oraz zmiany swobodnej powierzchni morza różnią się między sobą, co wynika przede wszystkim z różnego przebiegu tych zjawisk. W celu określenia wielkości i kierunku prądu na dowolnej głębokości wymaga na jest znajomość procesów wymiany pędu w pionie, które charakteryzowane są współczynnikiem lepkości burzliwej ( $k$ ). Znajomość procesów wymiany pędu w pionie nie jest potrzebna w celu znalezienia geometrycznego kształtu swobodnej powierzchni morza; wystarcza posiadanie informacji odnośnie do wielkości naprężeń stycznych przy powierzchni i dnie rozpatrywanego zbiornika wodnego, co znacznie upraszcza poszukiwanie kształtu swobodnej powierzchni.

Po tych wstępnych rozważaniach przystąpimy do szczegółowej analizy równań ruchu, najpierw w celu wydzielenia równań opisujących prądy wiatrowe w morzach płytkich, zbliżonych wymiarami do Bałtyku. Jak zawsze w rozważaniach hydrodynamicznych, w celu wyprowadzenia z równań ogólnych równania szczegółowego, zastosujemy analizę wymiarową (Birkhoff, 1950). Wprowadzimy najpierw pewne charakterystyczne wartości zmiennych występujących w badanym zagadnieniu: charakterystyczna prędkość pozioma ( $P$ ) wynosi 10 cm/sek, współczynnik lepkości burzliwej  $k = 10^2$  cm<sup>2</sup>/sek, współczynnik lepkości burzliwej  $A = 10^7$  cm<sup>2</sup>/sek, charakterystyczne wymiary akwenu (w przybliżeniu odpowiadające Bałtykowi): pionowy ( $L_2$ ) — 100 m, poziomy ( $L_1$ ) — 1000 km. Wprowadzimy te wielkości najpierw do równania (1.4.), w rezultacie otrzymamy:

$$\frac{2P}{L_1} + \frac{W}{L_2} = 0, \quad (1.5)$$

skąd dla ilorazu  $\left| \frac{W}{P} \right| = \frac{2L_2}{L_1} = 2 \cdot 10^{-4}$ .

Możemy więc stwierdzić, że wielkość prędkości pionowej jest znacznie mniejsza od prędkości poziomej, zatem w równaniu ruchu wyrażenia związane z prędkością pionową mogą być odrzucone w porównaniu z innymi wyrażeniami.

Analizując w podobny sposób pozostałe człony w równaniach ruchu otrzymamy postać uproszczoną opisującą prądy w płytkich morzach:

$$\frac{\delta u}{\delta t} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} + k \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\delta v}{\delta t} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} + k \frac{\delta^2 v}{\delta z^2}, \quad (1.7)$$



$$-\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} + g = 0. \quad (1.8)$$

Dodajmy, że człon charakteryzujący tarcie  $\left( k \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} ; k \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} \right)$  odgrywa

znaczną rolę tylko w powierzchniowej warstwie mórz i oceanów, w przybliżeniu do głębokości 100 m. W ogromnej masie wód oceanicznych poniżej tej głębokości prądy mogą być określone równaniem równowagi geostroficznej polegającym na tym, że siła Coriolisa znajduje się w równowadze dynamicznej z gradientem ciśnienia. W dalszych rozważaniach rozpatrywać będziemy wyłącznie ustalone w czasie prądy; takie założenie jest wynikiem pewnych trudności, które winny być z czasem przezwyciężone, a mianowicie nie znamy zależności współczynnika lepkości burzliwej ( $k$ ) od przebiegu procesów wymiany pędu w czasie.

Wprowadzimy dalsze przekształcenia równań ruchu; w tym celu rozwiążemy równanie (1.8):

$$p = \rho g (z - \xi), \quad (1.9)$$

gdzie  $\xi$  — zmiany poziomu swobodnej powierzchni morza względem położenia równowagi.

Zauważymy, że ciśnienie na swobodnej powierzchni  $z = \xi(x, y)$  równe jest zeru. Dodatkowo wartości  $\xi$  odpowiadają obniżeniu powierzchni; wynika to z przyjętego układu, oś  $z$  bowiem skierowana jest do środka Ziemi.

Wprowadzając wyrażenie (1.9) do równań (1.6) i (1.7), a jednocześnie uwzględniając niezależność od czasu, zapiszemy ostateczny kształt równań opisujących prądy wiatrowe:

$$-fv = g \frac{\delta \xi}{\delta x} + k \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}, \quad (1.10)$$

$$fu = g \frac{\delta \xi}{\delta y} + k \frac{\delta^2 v}{\delta z^2}. \quad (1.11)$$

Równania powyższe wykorzystane zostaną do obliczeń prądów w morzach płytkich zbliżonych wymiarami do Bałtyku.

W Morzu Bałtyckim występują dwa rodzaje prądów: 1. prądy pochodzenia wiatrowego, których pierwszą przyczyną jest naprężenie styżne wiatru oraz 2. prądy gęstościowe — efekt wlewów wód słonych z Morza Północnego oraz następnego procesu mieszania się tych wód z właściwymi wodami Bałtyku.

Generacja prądów wiatrowych następuje na swobodnej powierzchni morza, tutaj też występują największe prędkości, rzędu 10—100 cm/sek. Z dala od brzegów prądy te w warstwie powierzchniowej z powodzeniem



mogą być oceniane za pomocą wzorów empirycznych wiążących prędkość wiatru i prędkość prądu.

Prądy gęstościowe nie wykazują wyraźnych warstw, gdzie następuje ich generacja. Wielkość tych prądów jest rzędu 1—2 cm/sek. Mogą one zatem przy obliczaniu prądów wiatrowych być pomijane.

Wracając do równań (1.10) oraz (1.11) zauważmy, że jednoznaczne ich rozwiązanie otrzymamy tylko po sprecyzowaniu warunków brzegowych. Rozwiązanie tych równań dla konkretnych mórz otrzymać możemy wyłącznie metodami numerycznymi przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych. Metody takie zostaną wprowadzone w następnych rozdziałach.

Przejdziemy teraz z kolei do poszukiwania geometrycznego kształtu swobodnej powierzchni ujętego równaniem

$$z = \xi(x, y, t).$$

Zagadnienie to sformułujemy w ten sposób, aby procesy wymiany pędu w pionie nie wpływały na wynik ostateczny. W tym celu zamiast prędkości poziomych  $u$  i  $v$  wprowadzimy wydatki objętościowe  $Q_x = \int_{\xi}^H u dz$

oraz  $Q_y = \int_{\xi}^H v dz$ .

Równaniami wyjściowymi dla dalszych rozważań będą (1.6) i (1.7), przy czym zamiast ciśnienia wprowadzimy wyrażenie (1.9). Całkując te równania od powierzchni  $z = \xi(x, y, t)$  do dna  $z = H(x, y)$  otrzymamy:

$$\frac{\delta Q_x}{\delta t} - f Q_y = g(H - \xi) \frac{\delta \xi}{\delta x} + k \frac{\delta u}{\delta z} \Bigg|_{z=\xi}^{z=H} \quad (1.12)$$

$$\frac{\delta Q_y}{\delta t} + f Q_x = g(H - \xi) \frac{\delta \xi}{\delta y} + k \frac{\delta v}{\delta z} \Bigg|_{z=\xi}^{z=H} \quad (1.13)$$

Ponieważ naprężenie styczne ( $\tau$ ) wyraża się w postaci (patrz Druet i Kowalik 1971):

$$\tau_x = -\rho k \frac{\delta u}{\delta z}; \quad \tau_y = -\rho k \frac{\delta v}{\delta z}, \quad (1.14)$$

$$\text{człon } k \frac{\delta u}{\delta z} \Bigg|_{z=\xi}^{z=H} \text{ przedstawimy jako } \frac{1}{\rho} (\tau_{x,\xi} = \tau_{x,H}),$$

gdzie indeksy  $\xi$  oraz  $H$  oznaczają odpowiednio naprężenia przy powierzchni i przy dnie akwenu. Naprężenia styczne są parametrami za-



leżnymi od samych przepływów oraz od własności aerodynamicznych powierzchni, do których są przyłożone. Ich wartości zostaną dokładnie przedyskutowane w dalszych rozważaniach.

Ponieważ w równaniach (1.12) i (1.13) występują trzy niewiadome  $Q_x$ ,  $Q_y$  oraz  $\xi$ , wprowadzimy dodatkowe równanie, całkując równanie ciągłości (1.4) od powierzchni do dna zbiornika:

$$\int_{\xi}^H \frac{\delta w}{\delta z} dz + \int_{\xi}^H \frac{\delta u}{\delta x} dz + \int_{\xi}^H \frac{\delta v}{\delta y} dz = 0. \quad (1.15)$$

Pierwsze wyrażenie z lewej strony równe jest różnicy prędkości pionowej przy dnie i powierzchni morza:

$$w(z = h) - w(z = \xi). \quad (1.16)$$

Przedstawiając równanie kształtu swobodnej powierzchni jako  $z = \xi(x, y, t)$ , prędkość pionowa przy powierzchni może być zapisana w postaci:

$$w(z = \xi) = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\delta \xi}{\delta t} + \frac{\delta \xi}{\delta x} u + \frac{\delta \xi}{\delta y} v \quad (1.17)$$

biorąc zaś za podstawę równanie powierzchni dna akwenu  $z = H(x, y)$  otrzymamy dla prędkości przy dnie  $w(z = H)$ :

$$w(z = H) = \frac{dH}{dt} = \frac{\delta H}{\delta t} u + \frac{\delta H}{\delta y} v, \quad (1.18)$$

wyrażenia drugie i trzecie z lewej strony równania (1.15) są analogiczne i mogą być przyjęte w postaci:

$$\int_{\xi}^H \frac{\delta u}{\delta x} dz = \frac{\delta}{\delta x} \int_{\xi}^H u dz - \frac{\delta H}{\delta x} u + \frac{\delta \xi}{\delta x} u, \quad (1.19)$$

$$\int_{\xi}^H \frac{\delta v}{\delta y} dz = \frac{\delta}{\delta y} \int_{\xi}^H v dz - \frac{\delta H}{\delta y} v + \frac{\delta \xi}{\delta y} v. \quad (1.20)$$

Wprowadzając tak otrzymane wyrażenia (1.16), ..., (1.20) do równania ciągłości (1.15) mamy:

$$\frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} = \frac{\delta \xi}{\delta t}. \quad (1.21)$$

Dalsze obliczenia wezbrań sztormowych będziemy prowadzić na podstawie układu równań (1.12), (1.13) oraz (1.21), wykorzystując odpowiednie algorytmy rozwiązań numerycznych.



## 2. STOCHASTYCZNE UJĘCIE METOD PREDYKCJI

### 2.1. Podstawowe charakterystyki stochastyczne

W poprzednim podrozdziale przedstawiono metody analityczne predykcji procesów hydrodynamicznych w morzu; na podstawie warunków początkowych i brzegowych oraz wykorzystując równania ruchu i ciągłości przewidywano zachowanie się mas wodnych w dowolnym czasie.

Należy podkreślić jednak, że w celu badania ruchu cieczy niezwykle cenne są metody statystyczne, a szczególnie stochastyczne. Wynika to stąd, że nie zawsze można sprecyzować ruch z dostateczną dokładnością, prawie zawsze bowiem występują jakieś elementy losowości. Nawet precyzując przebieg zjawiska metodami analitycznymi, przypadkowość wkrada się w momencie zadawania warunków początkowych i brzegowych. Warunki te znane są tylko z pewnym przybliżeniem i w związku z tym również rozwiązanie końcowe zawiera pewien element losowości. Obserwując jakieś zjawisko w ośrodku naturalnym nie możemy go wydzielić w stanie czystym, gdyż zawsze towarzyszą mu inne zjawiska i to również jest przyczyną przypadkowości w procesach oceanograficznych. Metody stochastyczne pozwalają w takim przypadku ocenić wpływ zjawisk towarzyszących.

Wprowadzenie metod stochastycznych związane jest jednak z wymogiem posiadania zbioru informacji o badanym procesie, a więc należy znać jego przebieg w czasie lub przestrzeni.

Zajmiemy się z kolei pewnymi prostymi związkami wynikającymi z teorii funkcji losowych zakładając, że nasze pomiary prądów lub poziomów stanowią realizację funkcji losowych —  $f(x, y, z, t)$ . Dokonując na przykład pomiaru prędkości prądu ( $V$ ) w danym punkcie  $r$ , w skończonym przedziale czasu  $2T$ , możemy napisać:

$$\begin{aligned} V_T(r, t) &= V(t) & \text{dla } |t| \leq T, \\ V_T(r, t) &= 0 & \text{dla } |t| > T. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Średnią wartość  $V_T(t)$  określamy za pomocą całki:

$$\overline{v_T(t)} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} v_T(t) dt. \quad (1.23)$$

Energia kinetyczna jest wielkością proporcjonalną do średniej od kwadratu prędkości:



$$\overline{V_T^2(t)} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V^2(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} V_T^2(t) dt. \quad (1.24)$$

Wprowadzimy z kolei jedną z najbardziej przydatnych zależności — funkcję autokorelacji:

$$K_T(h) = \frac{1}{2T} \int_{-T+\frac{|h|}{2}}^{T-\frac{|h|}{2}} V\left(t + \frac{h}{2}\right) V\left(t - \frac{h}{2}\right) dt \quad \text{dla } |h| \leq 2T, \quad (1.25)$$

$$K_T(h) = 0 \quad \text{dla } |h| > 2T.$$

Tę funkcję przepiszemy w innej postaci (często stosowanej):

$$K_T(h) = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} V(t)V(t+h) dt = \frac{1}{2T} \int_0^{\infty} V_T(t)V_T(t+h) dt, \quad (1.26)$$

z ciekawych własności funkcji autokorelacji warto zauważyć, że przy  $h = 0$ :

$$K_T(h=0) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V^2 dt, \quad (1.27)$$

a zatem jest to średnia energia kinetyczna przepływu. Dodajmy też, że  $K_T(h) \leq K_T(0)$ , czyli funkcja autokorelacji, przyjmuje wartość maksymalną przy  $h = 0$ . W procesach losowych, w miarę wzrostu przesunięcia w czasie ( $h$ ), funkcja autokorelacji zazwyczaj maleje.

Oprócz funkcji autokorelacji podstawową wielkością jest transformata Fouriera tej funkcji, czyli widmowa gęstość;

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T K_T(h) e^{-i\omega h} dh, \quad (1.28)$$

gdzie  $\omega$  jest częstością  $= \frac{2\pi}{t}$ .

Jeśli funkcja autokorelacji jest funkcją rzeczywistą, to z wyrażenia (1.28) otrzymamy:

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T K_T(h) \cos \omega h dh = \frac{1}{\pi} \int_0^T K_T(h) \cos \omega h dh \quad (1.29)$$

W przypadku prędkości prądu w morzu widmowa gęstość charakteryzuje gęstość energii kinetycznej, a w przypadku zmian poziomów — gęstość energii potencjalnej.



Ponieważ widmowa gęstość posiada tak jasną interpretację fizyczną, znalazła ona niezwykle obszerne zastosowanie we wszystkich modelach stochastycznych procesów hydrodynamicznych w morzu.

Funkcja autokorelacji oraz widmowa gęstość są bardzo ściśle powiązane z transformatą Fouriera funkcji losowej.

Rozpatrzmy dla przykładu transformatę Fouriera ( $A_T$ ) prędkości prądu wyrażonej zależnością (1.22):

$$A_T(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(t_2) e^{-i\omega t_2} dt_2 \quad (1.29)$$

oraz wielkość sprzężoną

$$A_T^*(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(t_1) e^{i\omega t_1} dt_1 \quad (1.30)$$

Mnożąc (1.29) oraz (1.30) stronami otrzymamy:

$$|A_T(\omega)|^2 = \frac{1}{4T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t_2-t_1)} V_T(t_1) V_T(t_2) dt_1 dt_2. \quad (1.31)$$

Oznaczając  $t_2 - t_1 = h$ , otrzymujemy z (1.31):

$$\begin{aligned} |A_T(\omega)|^2 &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega h} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(t_1) V_T(t_1 + h) dt_1 \right] dh = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega h} K_T(h) dh = \frac{\pi}{T} S_T(\omega). \end{aligned} \quad (1.32)$$

W ten sposób nie zawsze musimy obliczać widmową gęstość funkcji autokorelacji; w wielu przypadkach wystarczy znaleźć transformatę Fouriera badanej funkcji losowej. Ten rodzaj widmowej gęstości charakteryzuje rozkład energii drgań w jednym punkcie  $r$ . Dla opisu zależności drgań zachodzących w dwóch różnych punktach wprowadzimy realizację funkcji losowych  $v(t)$  oraz  $u(t)$ ; mogą to być na przykład zmiany poziomu, prądy itp.

Rozważmy funkcję wzajemnej korelacji w postaci:

$$K_{v,u}(h) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T\left(t + \frac{h}{2}\right) U_T\left(t - \frac{h}{2}\right) dt \quad \text{dla } |h| \leq 2T \quad (1.33)$$

$$K_{v,u}(h) = 0 \quad \text{dla } |h| > 2T$$

lub w innej postaci



$$K_{u,v}(h) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T\left(t + \frac{h}{2}\right) V_T\left(t - \frac{h}{2}\right) dt \quad \text{dla } |h| \leq 2T,$$

$$K_{u,v}(h) = 0 \quad \text{dla } |h| > 2T. \quad (1.34)$$

Funkcja korelacji jest tu miarą zależności drgań zachodzących w realizacjach  $u(t)$  i  $v(t)$ .

Rozbijemy funkcję korelacji wzajemnej na parzystą i nieparzystą część:

$$K_{u,v}(h) = \frac{1}{2} [K_{u,v}(h) + K_{u,v}(-h)] + \frac{1}{2} [K_{u,v}(h) - K_{u,v}(-h)] =$$

$$= E_{u,v} + F_{u,v}. \quad (1.35)$$

Widmową gęstość zapiszemy jako:

$$S_{u,v}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega h} (E_{u,v} + F_{u,v}) dh = S_c - iS_Q, \quad (1.36)$$

gdzie:  $S_c$  — część parzysta widmowa gęstości,  $S_Q$  — część nieparzysta.

Wyrażenie (1.36) stanowi bazę zdefiniowania dodatkowych wielkości precyzujących zależności między drganiami w dwóch różnych punktach. Fazę drgań  $\Theta$  określimy wyrażeniem:

$$\frac{S_Q}{S_c} = \operatorname{tg} \Theta, \quad (1.37)$$

koherencję zaś albo spójność:

$$F^2(\omega) = \frac{S_{u,v} S_{u,v}^*}{S_u \cdot S_v} = \frac{S_c^2 + S_Q^2}{S_u \cdot S_v}, \quad (1.38)$$

gdzie gwiazdka oznacza wartość sprzężoną.

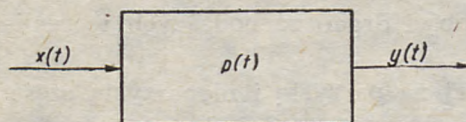
Teoretycznie spójność zmienia się w przedziale od 0 do 1. Jeżeli badane funkcje losowe zawierają oscylacje z jednakowymi częstotliwościami oraz różnica faz nie zmienia się z czasem, to wtedy spójność zawsze jest równa 1. W takim przypadku można twierdzić, że drgania w dwóch różnych punktach pochodzą z jednego źródła. Jeśli zaś drgania opisane przez realizację  $u(t)$  i  $v(t)$  nie mają wspólnych częstotliwości lub też różnica faz zmienia się w czasie, to spójność drgań dąży do 0 i możemy twierdzić, że badane zmiany pochodzą z różnych generatorów.

## 2.2. Przekształcenia liniowe funkcji losowych — funkcja przenoszenia

Analizując układ dynamiczny morze — atmosfera na przykładzie wahań powierzchni morza pod wpływem naprężenia stycznego wiatru zakładamy, że układ ten charakteryzuje się pewnymi stałymi parametrami



trami. Procesy zachodzące tutaj mogą być opisane za pomocą równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami. Jeżeli na wejściu układu znajduje się proces losowy  $x(t)$ , a na wyjściu proces losowy  $y(t)$ , po-



Ryc. 1. Schemat układu dla jednej zmiennej na wejściu

Fig. 1. Diagram of the one dimensional input variables

wstający w wyniku działania procesu  $x(t)$ , to rozwiązanie możemy przedstawić w postaci:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (1.39)$$

gdzie:  $p(\tau)$  — funkcja charakteryzująca własności układu przedstawionego na ryc. 1.

Przejdziemy z kolei w równaniu (1.39) od czasu do częstości, w tym celu wykonamy transformację Fouriera zgodnie z wyrażeniem (1.29):

$$\frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) X(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt. \quad (1.40)$$

Zamieniając kolejność całkowania w prawej stronie oraz wprowadzając zmienną  $t_1 = t - \tau$  otrzymamy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1 = 2TP(\omega) X(\omega) = Y(\omega), \quad (1.41)$$

gdzie:  $X(\omega)$ ,  $P(\omega)$ ,  $Y(\omega)$  transformatory funkcji  $x(t)$ ,  $p(t)$ ,  $y(t)$ .

Transformata  $P(\omega)$  zwana jest funkcją przenoszenia; opisuje ona własności układu mechanicznego na osi częstości. Zastosujemy do układu przedstawionego na ryc. 1 poprzednio poznane własności funkcji, przy czym zakładamy, że funkcje rozważane są stacjonarne (Swiesznikow 1965).

Przede wszystkim sprecyzujemy postać funkcji autokorelacji procesu wyjściowego na podstawie procesu wejściowego:

$$\begin{aligned} K_y(h) &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} y\left(t - \frac{h}{2}\right) y\left(t + \frac{h}{2}\right) dt = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau_1) x\left(t + \frac{h}{2} - \tau_1\right) p(\tau_2) x\left(t - \frac{h}{2} - \tau_2\right) d\tau_1 d\tau_2 \right] dt = \end{aligned}$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau_1)p(\tau_2)K_x(h + \tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (1.42)$$

Widmowa gęstość może być obliczona z wyrażenia (1.42) przez wprowadzenie transformacji Fouriera lub też drogą znacznie prostszą, wykorzystując wyrażenie (1.32):

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{T}{\pi} |Y(\omega)Y^*(\omega)| = 4T^2P(\omega)P^*(\omega) \frac{T}{\pi} X(\omega)X^*(\omega) = \\ &= 4T^2|P(\omega)|^2S_x(\omega). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Z wyrażenia (1.43) widzimy, że znając własności funkcji przenoszenia  $P(\omega)$  oraz widmową gęstość procesu wejściowego  $S_x(\omega)$  z łatwością obliczymy widmową gęstość procesu  $S_y(\omega)$ . Często jednak w prognozowaniu procesów wzajemnego oddziaływania morza i atmosfery stoimy przed zadaniem odwrotnym: znamy z pomiarów widmowe gęstości procesów wejściowych i wyjściowych, a nie znamy funkcji przenoszenia. Co więcej spodziewamy się, że raz określona funkcja przenoszenia będzie niezmienna w czasie i może być wykorzystana dla prognozowania procesów wyjściowych.

W tym celu wprowadzimy funkcję korelacji między  $x(t)$  oraz  $y(t)$ :

$$K_{xy}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) K_x(h - t) dt \quad (1.44)$$

oraz odpowiadającą jej widmową gęstość:

$$S_{xy}(\omega) = 2TP(\omega)S_x(\omega); \quad (1.45)$$

z tego wyrażenia znajdziemy funkcję przenoszenia; dodać jednak należy, że  $P(\omega)$  jest wielkością zespoloną, a zatem charakteryzuje się amplitudą i fazą:

$$P(\omega) = |P(\omega)|e^{-i\varphi}. \quad (1.46)$$

Zgodnie z wyrażeniem (1.36) widmowa gęstość (1.45) może być zapisana w postaci:

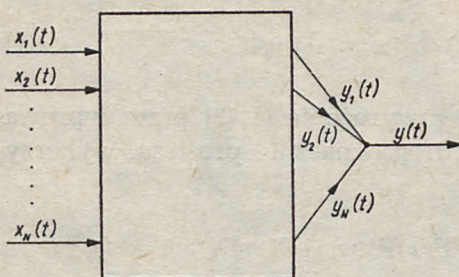
$$S_{xy}(\omega) = S_c - iS_Q = 2T|P(\omega)|e^{-i\varphi}S_x(\omega). \quad (1.47)$$

Przesunięcie fazowe procesu wyjściowego względem wejściowego daje równanie (1.47):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{S_Q}{S_c}. \quad (1.48)$$

Przedstawiliśmy powyżej model bardzo prosty z punktu widzenia zjawisk zachodzących w morzu, przeważnie jednak na wejście układu dzia-





Ryc. 2. Schemat układu dla wielu zmiennych na wejściu

Fig. 2. Diagram of the multi-dimensional input variables

ła wiele procesów. Na przykład zmiany poziomu morza wywołane są wiatrem i ciśnieniem. Rozważmy zatem układ, kiedy na wejście działa N procesów (rys. 2). Powodują one N wyjściowych procesów, które sumują się i w rezultacie otrzymujemy sygnał sumaryczny:

$$y = \sum_{i=1}^N y_i. \quad (1.49)$$

Każdy z procesów może być przedstawiony w postaci:

$$y_i = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(\tau) x_i(t - \tau) d\tau. \quad (1.50)$$

Wprowadzając przekształcenie analogiczne do wyrażenia (1.41), otrzymujemy:

$$Y_i(\omega) = 2TP_i(\omega) X_i(\omega) = P_i^1(\omega) X_i(\omega). \quad (1.51)$$

W dalszym ciągu nie będziemy wyprowadzali wszystkich przekształceń, a wprowadzimy tylko wyrażenia związane z widmowymi gęstościami. Ponieważ transformata Fouriera procesu wyjściowego wynosi:

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^N Y_i(\omega) = \sum_{i=1}^N P_i^1(\omega) X_i(\omega), \quad (1.52)$$

to zgodnie z wyrażeniem (1.32) otrzymamy dla widmowej gęstości:

$$\begin{aligned} S_y = S_{y_i y_j'} &= \frac{T}{\pi} |Y(\omega)|^2 = \frac{T}{\pi} \sum_{i=1}^N Y_i(\omega) \sum_{j=1}^N Y_j^*(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_i^1(\omega) P_j^{*1}(\omega) S_{x_i y_j}(\omega). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Jeżeli procesy  $x_i$  oraz  $x_j$  (dla  $i \neq j$ ) są nieskorelowane, to widmowa gęstość  $S_{x_i x_j} = 0$ , a z wyrażenia (1.53) pozostaje:



$$S_{y_1 y_1} = \sum_{i=1}^N |P_{ij}^1(\omega)|^2 S_{x_i x_i}(\omega). \quad (1.56)$$

Jest to wynik analogiczny do otrzymanego poprzednio (1.43).

Rozpatrzmy teraz z kolei korelację między sumarycznym sygnałem wyjściowym i dowolnym sygnałem wejściowym  $x_j$ ; wtedy dla widmowej gęstości otrzymamy:

$$\begin{aligned} S_{y, x_j} &= \frac{T}{\pi} (Y(\omega) X_j^*(\omega)) = \\ &= \frac{T}{\pi} \left( \sum_{i=1}^N P_i(\omega) X_i(\omega) x_j^*(\omega) \right) = \sum_{i=1}^N P_i(\omega) S_{ij}(\omega). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Dla nas najbardziej interesujący jest przypadek, kiedy na wejściu mamy dwa procesy (wiatr i ciśnienie), a na wyjściu jeden (zmiany poziomu morza), tutaj wyrażenie (1.57) przyjmuje postać:

$$S_{y x_1} = P_1(\omega) S_{11}(\omega) + P_2(\omega) S_{21}(\omega), \quad (1.58a)$$

$$S_{y x_2}(\omega) = P_1(\omega) S_{12}(\omega) + P_2(\omega) S_{22}(\omega). \quad (1.58b)$$

Jak zawsze celem podstawowym przy tego rodzaju obliczeniach jest określenie funkcji przenoszenia  $P_1(\omega)$  oraz  $P_2(\omega)$ , a zatem:

$$P_1 = \frac{S_{y x_1} S_{22} - S_{y x_2} S_{21}}{\Delta}, \quad (1.59a)$$

$$P_2 = \frac{S_{y x_2} S_{11} - S_{y x_1} S_{12}}{\Delta}, \quad (1.59b)$$

gdzie:  $\Delta = S_{11} S_{22} - S_{21} S_{12}$ .

Dodajmy, że podobnie jak w wyrażeniu (1.46)  $P_1$  i  $P_2$  są wielkościami zespolonymi i charakteryzują się określoną amplitudą oraz fazą.

### 2.3. Estymacja niektórych charakterystyk losowych

W zagadnieniach praktycznych nie dysponujemy ciągłym zapisem realizacji funkcji losowej w czasie (lub przestrzeni), lecz są to wartości dyskretne pomierzone w chwilach  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Odstęp czasu między dwoma kolejnymi pomiarami  $\Delta t = t_{i+t} - t_i$  nazywamy krokiem próbkowania albo kwantowania.

Funkcję autokorelacji (1.26) przedstawiamy w postaci sumy:

$$K(p) = \frac{1}{N-p} \sum_{i=1}^{N-p} V_i V_{i+p}, \quad (1.60)$$



gdzie:  $N$  — liczba pomiarów odpowiada okresowi  $2T$  w wyrażeniu (1.26),  $i$  — wskaźnik bieżący odpowiada chwili czasowej  $t$ ,  $p$  — wskaźnik odpowiadający  $h$ .

Widmową gęstość wyrażoną całką (1.29) również można by przyjąć jako sumę:

$$S(\omega) = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{i=0}^N K(h_i) \cos(\omega h_i). \quad (1.61)$$

Przy estymacji widmowej gęstości ciąg pomiarów od 0 do  $N$  jest jednak rozbijany na krótsze ciągi, przy czym sumowanie przebiega tylko do wartości  $M$ , wybieranej z dodatkowych warunków dotyczących dokładności oceny widmowej gęstości.

Widmową gęstość będziemy obliczać za pomocą następującej sumy:

$$S(p) = \frac{K_0}{2} + \sum_{q=1}^{M-1} K_q \cos \frac{q\pi p}{M} + \frac{K_M}{2} \cos \pi p, \quad (1.62)$$

gdzie:  $q$  — indeks sumowania,  $q = 0, 1, \dots, M$ ,  $M$  — maksymalna wartość indeksu  $p$ .

Współczynniki autokorelacji w (1.62) wykorzystane są z obliczeń wykonanych na podstawie (1.60). Podobnie jak powyżej zapisać możemy postać numeryczną współczynników korelacji i odpowiadające im widmowe gęstości  $S_c$  oraz  $S_Q$ .

Wartości obliczone z wyrażenia (1.62) są dalej wygładzane filtrem zaproponowanym przez Blackmana i Tuckeya (1958).

$$S'(p) = 0,23 S_{p-1} + 0,54 S_p + 0,23 S_{p+1}, \quad (1.63)$$

przy czym  $S_{-1} = S_1$ ;  $S_{M+1} = S_{M-1}$ .

Obliczona  $S_p$  zawarta jest w przedziale częstości, którego wartość środkowa wyraża się następująco:

$$\omega_p = \frac{2\pi p}{2M\Delta t}, \quad (1.64)$$

a okres

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2M\Delta t}{p}. \quad (1.65)$$

Estymacja widmowej gęstości z zadaną dokładnością zależy od wyboru takich wielkości, jak  $M$ ,  $N$  oraz  $\Delta t$ . Często w obliczeniach praktycznych powstaje pytanie, jakie warunki należy spełnić, aby dwie wartości widmowej gęstości  $S(\omega_1)$  oraz  $S(\omega_2)$  mogły być rozdzielone na osi częstości. Zgodnie z wyrażeniem (1.64) różnica częstości między sąsiednimi wartościami widmowej gęstości —



$$\omega_{p+1} - \omega_p = \frac{\pi}{M\Delta t} \quad (1.66)$$

przy określonym kroku kwantowania  $\Delta t$  może być zmieniana tylko drogą wyboru  $M$ . Bardzo wąskie pasmo częstości zaś otrzymamy przy  $M \rightarrow \infty$ . Niestety z drugiej strony zwiększenie  $M$  wprowadza większe prawdopodobieństwo błędów losowych w trakcie estymacji widmowej gęstości. Wynika to z tego, że wariancja estymatora widmowej gęstości  $\sigma_{Sp}^2$  jest oceniana za pomocą wyrażenia:

$$\sigma_{Sp}^2 = \frac{3}{4} \frac{M}{N} S_p^2. \quad (1.67)$$

Widzimy zatem, że przy wyborze  $M$  kierować się musimy kompromisem między wysoką selektywnością występujących drgań (duże  $M$ ) a minimalizacją błędu przy ocenie widmowej gęstości (małe  $M$ ). Te dwie tendencje ujęte zostały za pomocą jednego parametru zwanego ilością stopni swobody ( $\nu$ ):

$$\nu = \frac{2N}{M}. \quad (1.68)$$

Wykorzystując wartości  $\nu$  obliczono przedziały ufności dla  $S_p$  (na podstawie rozkładu  $\chi^2$ ) z prawdopodobieństwem 95%. Takie przedziały przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1

$\nu$	Przedziały ufności Confidence interval	$\nu$	Przedziały ufności Confidence interval
2	0,21—40	15	0,55—2,4
3	0,32—14	20	0,59—2,1
4	0,36— 8,3	50	0,69—1,55
5	0,39— 6,0	100	0,78—1,35
6	0,42— 4,8	150	0,81—1,27
8	0,46— 3,8	200	0,83—1,23
10	0,49— 3,1	300	0,86—1,18

Z danych w tab. 1 wynika, że przy  $\nu = 20$  i obliczonej widmowej gęstości  $S_p = 1,0$ , wielkość rzeczywista tej gęstości, z prawdopodobieństwem 95%, zawarta jest w przedziale 0,59—2,1.



#### 2.4. Uwagi o zastosowaniu rozkładów statystycznych w zagadnieniach predykcji zjawisk dynamicznych w morzu

Dotychczas traktowaliśmy zbiór danych pomiarowych jako realizację funkcji losowych zależnych od czasu lub przestrzeni. Nie wszystkie dane mogą być tak rozpatrywane, nie zawsze bowiem stanowią one jednorodny szereg czasowo-przestrzenny lub też liczba danych jest w ogóle niedostateczna dla estymacji widmowej gęstości. Jednak czasami taki zbiór jest wystarczający dla ujęcia ich w postaci zmiennych losowych i odpowiadających im rozkładów częstości występowania. Uwagi te dotyczą przede wszystkim stanów morza, odnośnie do których zebrano znaczną liczbę pomiarów. Dodajmy też, że bezpieczeństwo urządzeń brzegowych zależy przede wszystkim od stanów ekstremalnych. Najwyższe i najniższe roczne stany wody są przyjmowane za zmienną losową, co jest uzasadnione charakterem zjawiska. Obliczenia statystyk stanów ekstremalnych rozwinęły się w hydrologii wód śródlądowych, gdzie rozkłady prawdopodobieństwa najwyższych stanów i przepływów wody są podstawą przy projektowaniu wszystkich budowli piętrzących, wałów przeciwpowodziowych oraz innych budowli wznoszonych w korytach rzek. W oceanografii zastosowanie tych metod rozpowszechniło się w ostatnich latach, przy czym obliczenia tego rodzaju występują również w literaturze polskiej dotyczącej wezbrań sztormowych i stanów wody (Wróblewski 1970).

Przy charakteryzowaniu zjawisk ekstremalnych ujmowanych jako zmienne losowe wykorzystywać będziemy dwie funkcje rozkładu prawdopodobieństwa: dystrybuantę i funkcję prawdopodobieństwa przewyższenia.

Dystrybuanta  $F(x)$  zmiennej losowej  $x$  wyraża się wzorem:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad (1.69)$$

funkcja zaś prawdopodobieństwa przewyższenia:

$$p(x) = \int_x^{\infty} f(x) dx. \quad (1.70)$$

W powyższych wzorach  $f(x)$  oznacza gęstość prawdopodobieństwa. Okres powtarzalności zjawisk związany z dystrybuantą wynosi  $T(x) = \frac{1}{F(x)}$ .

W praktyce oczywiście powyższe całki zamieniane są odpowiednimi sumami, operuje się bowiem zmiennymi dyskretnymi. Otrzymane rozkła-



dy wyrównuje się za pomocą teoretycznych rozkładów typu ciągłego. W przypadku dostatecznie dokładnego wyrównania punktów dystrybucyjności empirycznej za pomocą rozkładu teoretycznego możliwa jest ekstrapolacja, za pomocą krzywej teoretycznej, poza przedział otrzymany z pomiarów. Ponieważ wyniki obliczeń wyrażone są zazwyczaj za pomocą przyporządkowania określonego maksymalnemu stanowi odpowiedniego okresu powtarzalności wyrażonego w latach, ekstrapolacja umożliwia obliczanie maksymalnych stanów morza o powtarzalności na przykład 1 tys. lat na podstawie kilkudziesięciu lat pomiarów. Trzeba jednak zaznaczyć, że przebieg ekstrapolowanej krzywej teoretycznej poza obszarem wyznaczonym przez pomiary jest w sensie matematycznym tylko hipotezą statystyczną. Sprawdzanie zgodności z danymi pomiarowymi dokonuje się za pomocą testów.

Zagadnienia te oraz szereg pokrewnych wyłożone w sposób jasny i precyzyjny znaleźć można w monografii Kaczmarka (1970).

Stany minimalne dopiero od lat sześćdziesiątych stały się przedmiotem badań statystyki matematycznej, zapoczątkowanych przez Gumbela (1954).

## II. USTALONE PRĄDY POCHODZENIA WIATROWEGO W MORZACH PŁYTKICH

### 1. WSTĘP

Istnieje kilka hydrodynamicznych modeli opisujących wiatrowe prądy w morzach zamkniętych. Najwyraźniej jednak zjawiska fizyczne powstawania prądów zostały przedstawione w modelu Ekmana (1905, 1923). Naprężenie styczne wiatru jest podstawową siłą zewnętrzną powodującą przekazanie pędu w kierunku pionowym i powstawanie prądu dryfowego. W tym samym czasie obecność brzegu prowadzi do zmiany poziomu morza i występuje druga składowa prądu — wywołana nachyleniem powierzchni morza.

W liniowym modelu Ekmana prąd jest superpozycją dwóch powyższych składowych, co wynika z superpozycji rozwiązań niejednorodnego równania różniczkowego. Ogólnie zatem prędkość prądu ( $\vec{u}$ ) może być zapisana w postaci:

$$\vec{u} = f_1(\vec{\tau}) + f_2(\nabla \xi), \quad (2.1)$$



gdzie:  $f_1(\vec{\tau})$  — składowa prądu wywołana naprężeniem stycznym wiatru  $\tau$ ,

$f_2(\nabla \xi)$  — składowa związana z nachyleniem powierzchni  $\nabla \xi$ .

Pierwsza składowa równania 2.1 jest ściśle określona, gdyż naprężenie styczne wiatru jest znaną funkcją prędkości i kierunku wiatru nad obszarem morskim.

Druga składowa w tym równaniu jest nieznana i dlatego należy wskazać dodatkowe równania określające nachylenie powierzchni morza. Wynikają tu jednak pewne trudności, przede wszystkim ciśnienie wywołane nachyleniem powierzchni morza nie dociera do dna, lecz ulega tłumieniu na skutek obecności gradientu gęstości. (Ten czynnik powoduje, że na pewnej głębokości  $\nabla \xi = 0$ ). Innego rodzaju trudność wynika z braku wiadomości o pionowym współczynniku lepkości burzliwej i jego zależności od wiatru, głębokości itp. Te trudności zazwyczaj zmuszają do korzystania z metody całkowania w pionie przepływów poziomych, co prowadzi w rezultacie do obliczania wydatków objętościowych zamiast prądu.

W morzach płytkich, gdzie baroklinowość nie odgrywa poważnej roli, zmiany ciśnienia wywołane nachyleniem powierzchni akwenu przekazywane będą w głąb bez tłumienia. W niniejszym opracowaniu morze płytkie charakteryzuje się brakiem zjawiska baroklinowości.

Można zatem scałkować w pionie równanie Ekmana dla prądu i na tej drodze otrzymać dodatkowe równanie w celu określenia nachylenia powierzchni morza. To pozwoli za pomocą równania 2.1 otrzymać pole prądu w morzu. W wielu przypadkach znalezienie nachylenia powierzchni z równań różniczkowych opisujących zmiany poziomu wody jest celem zbyt trudnym, gdyż warunki graniczne nie zawsze dają się sprecyzować w sposób oczywisty. Zazwyczaj, aby ominąć tę przeszkodę, wprowadza się funkcję prądu i poszukuje się rozwiązania eliptycznych równań różniczkowych dla funkcji prądu.

W morzu rzeczywistym, w związku z wystąpieniem wysp, wyłania się problem dodatkowy. Obszar całkowania zmienia się z jednospójnego w wielospójny i aby otrzymać wartość funkcji prądu należy wprowadzić pomocnicze warunki brzegowe. Podstawowe założenia dla tych warunków można znaleźć w teorii sprężystości, a jednym z pierwszych, który sprowadził takie warunki do zagadnień dynamiki morza, był Kamenkovitch (1961).

Teoria Ekmana uległa wielu poważnym zmianom w pracach Felzenbauma (1960), Saint-Guilley'ego (1959, 1962) oraz Welandera (1957).



## 2. RÓWNANIA EKMANA

Równania Ekmana dla prądów ustalonych mogą być zapisane w postaci równań (1.10) oraz (1.11):

$$-f v = g \frac{\delta \xi}{\delta x} + k \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}, \quad (2.2)$$

$$f u = g \frac{\delta \xi}{\delta y} + k \frac{\delta^2 v}{\delta z^2}. \quad (2.3)$$

Warunki graniczne na powierzchni morza ( $z = \xi \cong 0$ ) bierzemy w postaci:

$$\tau_x = -\rho k \frac{\delta u}{\delta z}; \quad \tau_y = -\rho k \frac{\delta v}{\delta z}, \quad (2.4)$$

a przy dnie ( $z = H$ ):

$$u = v = 0. \quad (2.5)$$

W celu znalezienia rozwiązania układu równań (2.2), (2.3) z warunkami granicznymi (2.4), (2.5) pomnożymy równanie (2.3) przez liczbę urojoną  $i = \sqrt{-1}$ , a następnie dodamy stronami (2.2) i (2.3).

Rozwiązanie wynikłego równania różniczkowego jest sumą rozwiązań równania jednorodnego i niejednorodnego:

$$S = u + iv = \frac{\tau \operatorname{sh} \alpha (H - z)}{\alpha \rho k \operatorname{ch} \alpha H} + \frac{K g i}{f} \left( \frac{\operatorname{ch} \alpha z}{\operatorname{ch} \alpha H} - 1 \right), \quad (2.6)$$

gdzie:

$$\alpha = \left( \frac{f}{2k} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + i); \quad \tau = \tau_x + i \tau_y;$$

$$K = \frac{\delta \xi}{\delta x} + i \frac{\delta \xi}{\delta y}.$$

Zauważmy, że w równaniu (2.6) składowa związana ze zmianami poziomu morza ( $K$ ) jest nieznaną. Aby znaleźć tę składową założymy, że w morzu płytkim zmiany poziomu morza nie są tłumione przez pionowy gradient gęstości. W tym przypadku wartość  $K$  w równaniu (2.6) jest niezależna od głębokości. Powyższe założenie stwarza możliwość wprowadzenia dodatkowego równania dla wielkości  $K$  poprzez całkowanie w pionie równania (2.2) oraz (2.3).



## 3. RÓWNANIA WYDATKU OBJĘTOŚCIOWEGO I FUNKCJI PRĄDU

Całkując równania (2.2) i (2.3) w pionie od powierzchni ( $\xi$ ) do dna ( $H$ ) otrzymujemy:

$$-fQ_y = gH \frac{\delta \xi}{\delta x} + \tau_x - rQ_x, \quad (2.7)$$

$$fQ_x = gH \frac{\delta \xi}{\delta y} + \tau_y - rQ_y, \quad (2.8)$$

gdzie:

$$Q_x = \int_{\xi}^H u dz, \text{ i } Q_y = \int_{\xi}^H v dz$$

są składowymi wydatku objętościowego ( $\vec{Q}$ ).

Napężenia styczne przy dnie:

$$\rho k \frac{\delta u}{\delta z} \Big|_{z=H} \text{ oraz } \rho k \frac{\delta v}{\delta z} \Big|_{z=H}$$

są przyjęte w postaci liniowej jako  $rQ_x$  oraz  $rQ_y$  ze stałym współczynnikiem tarcia  $r$ . Wartość tego współczynnika będzie podana dalej (Stałe fizyczne w zagadnieniu ustalonych prądów wiatrowych).

Istotne jest, że rozwiązanie (2.6) oraz równania (2.7) i (2.8) otrzymano przez wprowadzenie dodatkowego założenia, mianowicie, że zmiany poziomu morza ( $\xi$ ) są znacznie mniejsze od głębokości morza w danym punkcie. Wyłącza to w dalszych rozważaniach strefę płytkowodną morza, gdzie  $\xi \cong H$ .

Równania (2.4) oraz (2.5) charakteryzują warunki brzegowe na powierzchni i przy dnie. Za pomocą wydatku objętościowego można znaleźć warunki przy brzegach mórz. Mianowicie normalną do brzegu składową wydatku objętościowego przyjęto jako zero:

$$Q_n = 0. \quad (2.9)$$

Podstawowy cel naszych obliczeń — określenie kierunku i prędkości prądu w akwenie morskim — będzie osiągnięty, jeżeli obliczymy nachylenie poziomu morza  $\frac{\delta \xi}{\delta x}$  i  $\frac{\delta \xi}{\delta y}$  z równań (2.7) i (2.8). Wprowadzając dalsze przekształcenie równań, zauważymy przede wszystkim, że równanie ciągłości dla wydatku objętościowego można zapisać w postaci:

$$\frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} = 0. \quad (2.10)$$



Powyższe równanie będzie również spełnione, jeżeli zastosujemy funkcję prądu w postaci:

$$Q_x = \frac{\delta\Psi}{\delta y}; Q_y = -\frac{\delta\Psi}{\delta x}. \quad (2.11)$$

Różniczkując równania (2.7) i (2.8) oraz uwzględniając (2.10) i (2.11) dochodzimy do równania końcowego, które nie zawiera składowych  $\frac{\delta\xi}{\delta x}$ ,  $\frac{\delta\xi}{\delta y}$ :

$$\begin{aligned} r\Delta\Psi + \frac{f}{H} J(H, \Psi) - \frac{r}{H} (\nabla H \cdot \nabla\Psi) + \beta \frac{\delta\Psi}{\delta x} = \\ = (\text{rot } \vec{\tau})_z + \frac{1}{H} \left( \frac{\delta H}{\delta x} \tau_y - \frac{\delta H}{\delta y} \tau_x \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

gdzie symbole zdefiniowano w sposób następujący:

$$\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \quad \text{— dwuwymiarowy laplasjan,}$$

$$J(H, \Psi) = \left( \frac{\delta H}{\delta x} \frac{\delta\Psi}{\delta y} - \frac{\delta H}{\delta y} \frac{\delta\Psi}{\delta x} \right) \quad \text{— dwuwymiarowy jacobian,}$$

$$\nabla = \vec{i} \frac{\delta}{\delta x} + \vec{j} \frac{\delta}{\delta y} \quad \text{— dwuwymiarowa nabra,}$$

$(\nabla H \cdot \nabla\Psi)$  — dwuwymiarowy iloczyn skalarowy,

$(\text{rot } \vec{\tau})_z$  — pionowa (z) składowa  $\text{rot } \vec{\tau}$ ,

$\beta = \frac{\delta f}{\delta y}$  — zmiany parametru Coriolisa (f) z szerokością geograficzną.

Wyrażenie zawierające  $\beta$  będzie pominięte w dalszych obliczeniach.

Warunki brzegowe dla równania (2.12) mogą być znalezione, jeśli założymy, że linia brzegowa opisana jest analityczną krzywą  $\Gamma_0(x, y)$ . W tym celu wybierzemy dwa kierunki: prostopadły ( $\vec{n}$ ) oraz styczny ( $\vec{s}$ ) do tej krzywej, tak jak pokazano na ryc. 3. Wtedy warunki brzegowe (2.9) przyjmują postać:

$$Q_n = \frac{\delta\Psi}{\delta s} = 0;$$

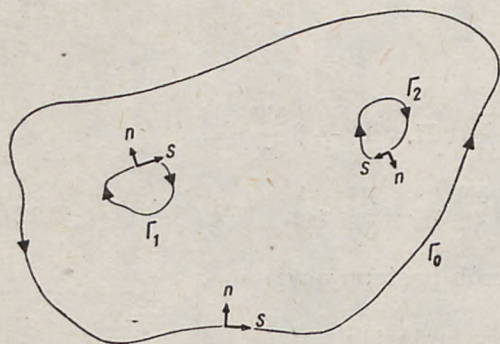
$$\Psi(s) = \text{const} = C_0. \quad (2.13)$$

W ten sposób zagadnienie wydatków objętościowych zostało przedstawione w postaci równania eliptycznego (2.12) z warunkiem brzegowym (2.13), co charakteryzuje tzw. problem Dirichleta.



Wydaje się, że nasz cel — znalezienie metody obliczeń pola prędkości prądu — został w ten sposób sprecyzowany. Postępujemy wzdłuż pewnego łańcucha równań, poczynając od (2.6) i kończąc na równaniu (2.12).

Następnym krokiem będzie włączenie wysp do przedstawionego zagadnienia. Niech  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  będą konturami opisującymi wyspy, wewnątrz podstawowego konturu  $\Gamma_0$ , jak pokazano na ryc. 3.



Ryc. 3. Przykład obszaru wielospójnego

Fig. 3. Example of multiple connected area

Wtedy warunek (2.13) będzie ważny na każdej wyspie w postaci:

$$\Psi|_{\Gamma_0} = C_0; \Psi|_{\Gamma_1} = C_1; \Psi|_{\Gamma_n} = C_n. \quad (2.14)$$

Zagadnienie jednak jest nadal nie sprecyzowane, gdyż stałe  $C_1, C_n$  są nieznanne. W przypadku, kiedy nie ma wysp (obszar jednospójny), przyjmując  $\Psi|_{\Gamma_0} = C_0$  jako zero, z łatwością dochodzimy do rozwiązania równania (2.12).

Ten przypadek nie odnosi się do obszaru wielospójnego. Oczywiście można założyć określoną wartość dla pewnej niewiadomej spośród wielkości  $C_1, C_n$  i dla ułatwienia dalszych obliczeń przyjmujemy wielkość  $C_0 = 0$ . Ostatecznie możemy sprecyzować nasze zadanie jako poszukiwanie rozwiązania równania (2.12) w obszarze wielospójnym z następującymi warunkami granicznymi:

$$\Psi|_{\Gamma_0} = 0; \Psi|_{\Gamma_1} = C_1; \dots, \Psi|_{\Gamma_n} = C_n. \quad (2.15)$$

#### 4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DIRICHLETA W OBSZARZE WIELOSPÓJNYM

Założmy dla ułatwienia dalszych rozważań, że stałe  $C_1, \dots, C_n$  są znane. Równania (2.12) i warunki graniczne (2.15) są liniowe; stwarza to możliwość użycia zasady superpozycji przy konstruowaniu rozwiązania równania (2.12) jako sumy rozwiązań niejednorodnego równania z jedno-



rodnymi warunkami granicznymi ( $C_0 = \dots = C_n = 0$ ) oraz jednorodnego równania z niejednorodnymi warunkami brzegowymi ( $C_0 \neq 0$  lub  $C_1 \neq 0$  lub  $C_2 \neq 0, \dots$  lub  $C_n \neq 0$ ). Na podstawie powyższego rozwiązanie (2.12) jest sumą:

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{k=1}^n C_k \Psi_k, \quad (2.16)$$

gdzie:

$\Psi_0$  — rozwiązanie (2.12) z jednorodnymi warunkami granicznymi

$$\Psi_0|_{\Gamma_0} = \Psi_0|_{\Gamma_1} = \dots = \Psi_0|_{\Gamma_n} = 0, \quad (2.17)$$

$\Psi_k$  — jest rozwiązaniem jednorodnego równania (2.12) z następującymi warunkami granicznymi:

$$\Psi_k|_{\Gamma_k} = 1, \Psi_k|_{\Gamma_0} = \Psi_k|_{\Gamma_1} = \dots = \Psi_k|_{\Gamma_n} = 0. \quad (2.18)$$

Poszukując rozwiązania zagadnienia Dirichleta w postaci sumy (2.16), definiujemy wartości graniczne funkcji prądu na konturach  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  jako 1, jakkolwiek wartości stałych  $C_1, C_2, \dots, C_n$  są nadal nieznane. Wprowadzimy tutaj pomocnicze warunki związane z całkowaniem wzdłuż konturów w obszarze wielospójnym. Załóżmy, że poruszamy się wzdłuż konturu  $\Gamma_k$ ; po przybyciu do punktu, z którego wyszliśmy stwierdzamy, że wielkości takie, jak  $p, u, v, \dots$  nie ulegają zmianie, gdyż wartości te odnoszą się do stanu stalonego. Na przykład dla funkcji prądu,  $d\Psi = 0$ , wokół  $\Gamma_k$ , podobnie dla zmian poziomu morza  $d\xi = 0$ . Warunek ten można ująć również w postaci całkowej:

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{\delta \xi}{\delta s} ds = \oint_{\Gamma_k} (\nabla \xi \cdot \vec{ds}) = 0 \quad (2.19)$$

Wartość takiej całki zależy od kierunku ruchu wokół konturu  $\Gamma_k$ , jak przedstawiono na ryc. 3.

Wykonując całkowanie wokół każdego konturu  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ , otrzymamy  $n$  warunków dla określenia  $n$  nieznanych stałych ( $C_1, \dots, C_n$ ). W tym celu przepisujemy równania (2.7) i (2.8) w postaci wektorowej:

$$\frac{1}{gH} [\vec{f} \cdot \vec{Q}] = \nabla \xi + \frac{\vec{\tau} - r\vec{Q}}{gH}. \quad (2.20)$$

Mnożąc równanie (2.20) skalarowo przez  $\vec{ds}$  i całkując wokół konturu  $\Gamma_k$ , mamy:

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{1}{gH} ([\vec{f} \cdot \vec{Q}] \cdot \vec{ds}) = \oint_{\Gamma_k} (\nabla \xi \cdot \vec{ds}) + \oint_{\Gamma_k} \frac{1}{gH} (\vec{\tau} - r\vec{Q}) \cdot \vec{ds}. \quad (2.21)$$



Biorąc dalej pod uwagę warunki graniczne dla wydatków objętościowych (2.9) oraz równanie (2.19) wyrażenie (2.21) przyjmuje postać:

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{\tau_s}{gH} ds = \oint_{\Gamma_k} \frac{r}{c^2} Q_s ds = \oint_{\Gamma_k} \frac{r}{gH} \frac{\delta\Psi}{\delta n} ds, \quad (2.22)$$

gdzie:  $\tau_s$ ,  $Q_s$  — składowe naprężenia stycznego wiatru oraz wydatku objętościowego w kierunku  $s$ ,  $gH = c^2$ .

Podstawiając ostatecznie (2.16) do (2.22) otrzymujemy układ równań dla zdefiniowania niewiadomych stałych  $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{\tau_s}{c^2} ds = \oint_{\Gamma_k} \frac{r}{c^2} \left( \frac{\delta\Psi_0}{\delta n} + \sum_{i=1}^n C_i \frac{\delta\Psi_i}{\delta n} \right) ds, \quad (2.23)$$

gdzie:  $k = 1, 2, \dots, n$ .

## 5. STAŁE FIZYCZNE W ZAGADNIENIU USTALONYCH PRĄDÓW WIATROWYCH

Jak dotąd nie omawialiśmy stałych fizycznych zakładając, że są one znane. Oczywiście ten przypadek nie zawsze zachodzi. Powróćmy do równania Ekmana (patrz s. 25). Występuje tutaj: gęstość wody  $\rho$  (zakładamy, że woda jest jednorodna oraz  $\rho = 1$  CGS), parametr Coriolisa  $f$  (w modelu Morza Bałtyckiego  $f = 10^{-4}$  CGS), przyspieszenie ziemskie  $g = 981$  CGS, naprężenie styczne wiatru:

$$\tau = \gamma W^2, \quad (2.24)$$

gdzie:  $\gamma = 3.2 \cdot 10^{-6}$  CGS oraz  $W$  — prędkość wiatru (wyrażona w jednostkach CGS).

Najważniejszym parametrem jest współczynnik lepkości burzliwej  $k$ . Wiedza o tym współczynniku, jako funkcji prędkości wiatru ( $W$ ), gęstości wody morskiej ( $\rho$ ), głębokości morza ( $H$ ) oraz parametru Coriolisa ( $f$ ), jest podstawą dla obliczenia prędkości prądu (równanie 2.6).

Ogólnie przyjęte postępowanie wydaje się niewłaściwe, kiedy otrzymuje się najpierw rozwiązanie równania (2.6), a następnie wybiera się współczynnik lepkości ( $k$ ) z przedziału 1 do  $10^3$  CGS w taki sposób, aby otrzymać najlepszą zgodność z doświadczeniem.

Zależność współczynnika lepkości burzliwej od cytowanych powyżej parametrów była podana przez Felzenbauma (1960). Wykorzystywać będziemy dwa wyrażenia: (1) dla morza płytkiego (w sensie Ekmana), kiedy siła Coriolisa nie odgrywa znacznej roli (zauważmy, że nasza definicja morza płytkiego jest związana z efektem baroklinowości):



$$k_1 = 0.54 \cdot 10^{-4} HW, \quad (2.24)$$

(2) dla morza głębokiego, kiedy prądy nie zależą od głębokości:

$$k_2 = 4.7 \cdot 10^{-8} \frac{W^2}{f} = 4.7 \cdot 10^{-4} W^2. \quad (2.25)$$

Przyrównując (2.24) oraz (2.25) otrzymujemy:

$$H_1 = 8.7 \cdot 10^{-4} \frac{W}{f}. \quad (2.26)$$

Jest to głębokość, która rozdziela dwa obszary, gdzie są odpowiednio wyrażenia (2.24) oraz (2.25) spełnione; jeśli zatem głębokość w danym punkcie jest  $H$ , możemy wykorzystywać wyrażenie (2.24) lub (2.25) zgodnie z następującymi nierównościami:

$$\begin{aligned} \text{jeśli } H_1 > H, \text{ wtedy } k &= k_1, \\ \text{jeśli } H_1 < H, \text{ wtedy } k &= k_2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

W podrozdziale 3 (równania wydatku objętościowego i funkcji prądu) wprowadzono stałą  $r$  w związku z tarciem przy dnie. Współczynnik ten dla małych głębokości może być wyliczony na podstawie wyrażenia otrzymanego przez Ekmana (1905):

$$r = \frac{\pi k}{4H^2} \cong \frac{k}{H^2}. \quad (2.27)$$

Rząd wielkości  $r$  zawiera się w granicach  $10^{-4}$  do  $10^{-6}$  CGS. W naszych obliczeniach przeprowadziliśmy kilka eksperymentów, przyjmując  $r$  z przedziału  $10^{-5}$  ÷  $10^{-6}$  CGS i doszliśmy do podobnego wniosku jak Lauwier (1962), a mianowicie, że małe zmiany  $r$  nie wpływają praktycznie na ostateczną wartość wydatku objętościowego.

## 6. NIEKTÓRE UPROSZCZONE MODELE

Obliczenia rozpoczniemy od uproszczonego modelu prostokątnego morza o bokach  $a = 200$  km wzdłuż osi  $x$  i  $b = 100$  km wzdłuż osi  $y$ .

Celem tego doświadczenia będzie zbadanie rozkładu prądu w związku z różnymi wiatrami, nachyleniem dna i obecnością wysp w akwenie morskim.



### 6.1. Stała głębokość oraz silne zawirowanie wiatru

Zakładając stałą głębokość  $H = 50$  m i stały wiatr wiejący w kierunku  $x$  z prędkością zmieniającą się wzdłuż osi  $y$  (ryc. 4), otrzymujemy dla równania funkcji prądu (2.12) następujące wyrażenie:

$$r\Delta\Psi = \frac{\delta\tau_x}{\delta y} \quad (2.28)$$

z warunkowymi brzegowymi:

$$\Psi(0, y) = \Psi(x, 0) = \Psi(a, y) = \Psi(x, b) = 0. \quad (2.29)$$

Przyjmując dalej prędkość wiatru w postaci  $W = W_x = qy$ , równanie (2.28) przepisujemy jako:

$$\Delta\Psi = q'y \quad (2.30)$$

gdzie:  $q' = \frac{2(xq)^2}{r}$ .

Rozwiązanie równania (2.30) znane jest w teorii sprężystości (patrz Kac 1956) w postaci:

$$\Psi = q' \frac{y}{3!} (y^2 - b^2) - q' \frac{2b}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (2.31)$$

Jednocześnie rozwiązanie numeryczne równania (2.28) z łatwością może być znalezione poprzez wprowadzenie różnic skończonych (patrz Smith 1965, Collatz 1955):

$$\begin{aligned} & \frac{r}{(\Delta s)^2} [\Psi(j+1, k) + \Psi(j-1, k) + \\ & + \Psi(j, k+1) + \Psi(j, k-1) - 4\Psi(j, k)] = \\ & = \frac{\tau_x(j, k+1) - \tau_x(j, k-1)}{2\Delta s}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

gdzie:  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$  — wymiary siatki obliczeń numerycznych,  $j, k$  — wskaźniki siatki odpowiadające współrzędnym  $x$  oraz  $y$ .

Rozwiązania równania (2.32) poszukiwać będziemy metodą iteracji, przyjmując (2.32) w postaci:

$$\begin{aligned} \Psi(j, k) = & \frac{1}{4} [\Psi(j+1, k) + \Psi(j-1, k) + \\ & + \Psi(j, k+1) + \Psi(j, k-1)] + \frac{\Delta s}{8r} [\tau_x(j, k-1) - \tau_x(j, k+1)]. \end{aligned} \quad (2.33)$$



W celu przedyskutowania zagadnienia zbieżności procesu iteracyjnego przepiszemy (2.33) w ogólnej postaci:

$$\begin{aligned} \Psi(j, k) = & a(j+1, k) \Psi(j+1, k) + \\ & + a(j-1, k) \Psi(j-1, k) + a(j, k-1) \Psi(j, k-1) + \\ & + a(j, k+1) \Psi(j, k+1) + F(j, k). \end{aligned} \quad (2.34)$$

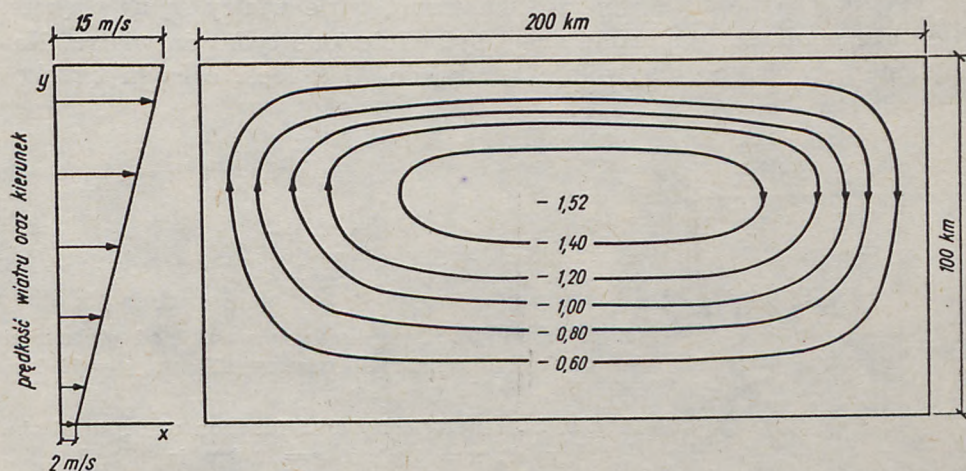
W ten sposób zamiast poszukiwania rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego poszukuje się rozwiązania układu równań (algebraicznych) liniowych ze współczynnikami  $a(j, k)$  oraz z członem niejednorodnym  $F(j, k)$ .

Warunki dostateczne dla zbieżności rozwiązania takiego układu równań, przy poszukiwaniu rozwiązania metodą iteracji, były dyskutowane wielokrotnie (patrz Faddeeva, 1959). Nakładają one ograniczenia na wielkości współczynników  $a(j, k)$  w równaniu (2.34). Jeden z tych warunków wyraża się nierównością:

$$\sum_k |a(j, k)| \leq 1. \quad (2.35)$$

W równaniu (2.33) współczynniki  $a(j+1, k) = \dots = a(j, k-1/4)$  i rozwiązanie z łatwością otrzymujemy metodą iteracji. Wyniki obliczeń dla równania (2.33) podano na ryc. 4.

Asymetria w rozkładzie linii prądu może być odniesiona do rozkładu wiatru wzdłuż osi  $y$ . Ponieważ wydatek objętościowy jest znany, z łat-

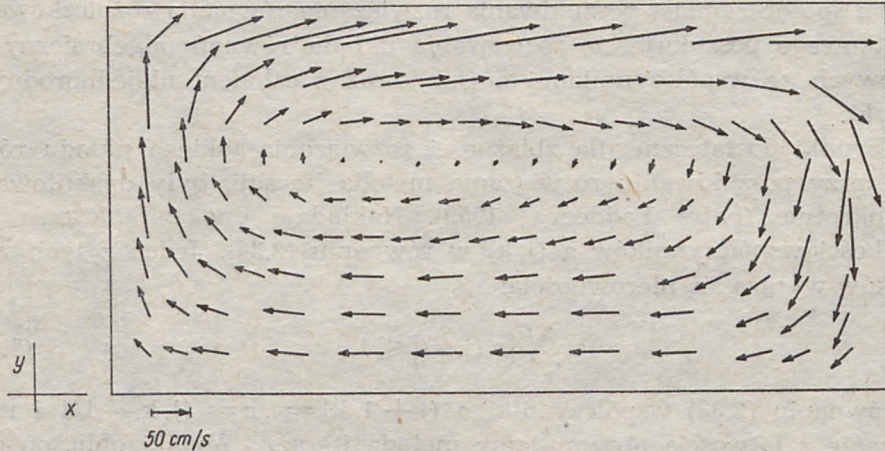


Ryc. 4. Izolinie funkcji wydatków objętościowych. Liczby wyrażają wydatki w milionach  $m^3/sec$

Fig. 4. Isolines of the function of volume transport. The numbers represent millions of  $cbm/sec$

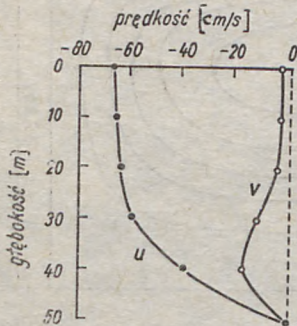


wością obliczymy  $\frac{\delta\xi}{\delta x}$  oraz  $\frac{\delta\xi}{\delta y}$  na podstawie równań (2.7) i (2.8). Wprowadzając te wartości do równania (2.6) dochodzimy do prędkości prądu. Prądy powierzchniowe, obliczone sposobem opisanym powyżej, zobrażowano na ryc. 5.



Ryc. 5. Prądy powierzchniowe odpowiadające rozkładowi wiatru z ryc. 4  
Fig. 5. Surface current corresponding to the wind pattern in Fig. 4

Jak wynika z ryc. 5, największe wartości prędkości prądu (do 150 cm/sek) obserwuje się w tej części akwenu, gdzie wiatry są największe. Ale duże prędkości prądu nie mogą być odniesione tylko do wiatru. Nachylenie powierzchni wywołuje prądy do 70 cm/sek, o czym przeko-



Ryc. 6. Prędkość prądu w zależności od głębokości w punkcie o współrzędnych  $x=120$  km,  $y=20$  km, na ryc. 5

Fig. 6. Current velocity as a function of depth at the point  $x=120$  km,  $y=20$  km in Fig. 5

nać się można z danych w dolnej części ryc. 5. Dla przedstawienia zależności prędkości prądu od głębokości wybrano punkt o współrzędnych:  $x=120$  km oraz  $y=20$  km (ryc. 6).



Pionowy rozkład prędkości w tym punkcie nie wykazuje zależności od siły Coriolisa.

Aby uzupełnić powyższą analizę należy podkreślić, że silne zawirowania wiatru występujące w stanie ustalonym są zjawiskiem rzadkim w przyrodzie, a podstawowym celem przedstawionego modelu było zbadanie wpływu dużych różnic prędkości wiatru na zjawiska prądów w morzu.

## 6.2. Stała wartość naprężenia wiatru i niejednorodne dno

Założmy, że głębokość morza zmienia się wzdłuż osi  $x$ , w postaci  $H = 2,5 \cdot 10^{-4}x + 25 \cdot 10^2$  (cm), południowy wiatr zaś wieje ze stałą prędkością  $W = W_y = 8$  m/sek. Równanie (2.12) przyjmuje postać:

$$r\Delta\Psi + \frac{f}{H} \frac{\delta H}{\delta x} \frac{\delta\Psi}{\delta y} - \frac{r}{H} \frac{\delta H}{\delta x} \frac{\delta\Psi}{\delta x} + \beta \frac{\delta\Psi}{\delta x} = \frac{1}{H} \frac{\delta H}{\delta x} \tau_y. \quad (2.36)$$

W tym równaniu zachowaliśmy wyrażenie  $\beta \frac{\delta\Psi}{\delta x}$ , aby wykazać, że nie tylko zmiany parametru Coriolisa, ale i zmiany głębokości akwenu mogą prowadzić do zwiększenia prędkości prądów przy brzegach morskich (Neumann 1958; Garner D.M. 1962). Stommel (1948) wyjaśnił wzrost prędkości przy zachodnich brzegach oceanów poprzez wyrażenie  $\beta \frac{\delta\Psi}{\delta x}$ , ale z równania (2.36) wynika, że wyrażenie to może być kompensowane, kiedy:

$$\beta \frac{\delta\Psi}{\delta x} = \frac{r}{H} \frac{\delta H}{\delta x} \frac{\delta\Psi}{\delta x}. \quad (2.37)$$

Zatem jeśli głębokość zmienia się w postaci funkcji wykładniczej  $H = H_0 \exp\left(\frac{\beta x}{r}\right)$ , nie będziemy obserwować zwiększenia prędkości prądu przy brzegach odniesionego do zmian parametru Coriolisa. W dalszych rozważaniach przyjmujemy  $\beta \frac{\delta\Psi}{\delta x} = 0$  i rozpatrzmy asymetrię przepływu związaną z niejednorodną głębokością.

Dodajmy, że w prawej części równania (2.36) występuje człon wymuszający, zależny od wzajemnego oddziaływania naprężenia stycznego wiatru ( $\tau_y$ ) oraz nachylenia dna.

Przystępując do rozwiązania równania (2.36) metodą iteracji zapiszemy to równanie w postaci różnic skończonych:



$$\begin{aligned} \Psi(j, k) = & \left[ \frac{r + b(j, k)}{4r} \right] \Psi(j, k + 1) + \\ & + \left[ \frac{r - a(j, k)}{4r} \right] \Psi(j - 1, k) + \left[ \frac{r - b(j, k)}{4r} \right] \Psi(j, k - 1) + \\ & + \left[ \frac{r - a(j, k)}{4r} \right] \Psi(j + 1, k) - \frac{(\Delta S)^2}{4r} F(j, k), \end{aligned} \quad (2.38)$$

gdzie:

$$b(j, k) = \frac{f}{H(j, k)} \cdot \frac{H(j + 1, k) - H(j - 1, k)}{4};$$

$$a(j, k) = \frac{r}{H(j, k)} \cdot \frac{H(j + 1, k) - H(j - 1, k)}{4};$$

$$F(j, k) = \frac{\tau_y(j, k)}{H(j, k)} \cdot \frac{H(j + 1, k) - H(j - 1, k)}{2 \Delta s}.$$

Jak wiemy z uprzedniej dyskusji, zbieżność metody iteracji zależy od współczynników przy funkcji:

$$\Psi(j, k + 1), \dots \Psi(j - 1, k) \cdot \text{Jeśli } a(i, k) = b(j, k) = 0,$$

otrzymujemy poprzednie wartości współczynników równe 1/4. W równaniu (2.38) trudności związane są ze współczynnikami  $a(j, k)$ , ponieważ wyrażenie  $\frac{r + a(j, k)}{4r}$  może być większe od 1, stąd nie zawsze możemy zapewnić zbieżność metody iteracji.

Najprostsze rozwiązanie tego zagadnienia polega na zamianie wzoru symetrycznego dla pierwszej pochodnej na wyrażenie asymetryczne:

$$\frac{\delta \Psi}{\delta x} = \frac{\Psi(j + 1, k) - \Psi(j, k)}{\Delta s}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\delta \Psi}{\delta x} = \frac{\Psi(j, k) - \Psi(j - 1, k)}{\Delta s}. \quad (2.40)$$

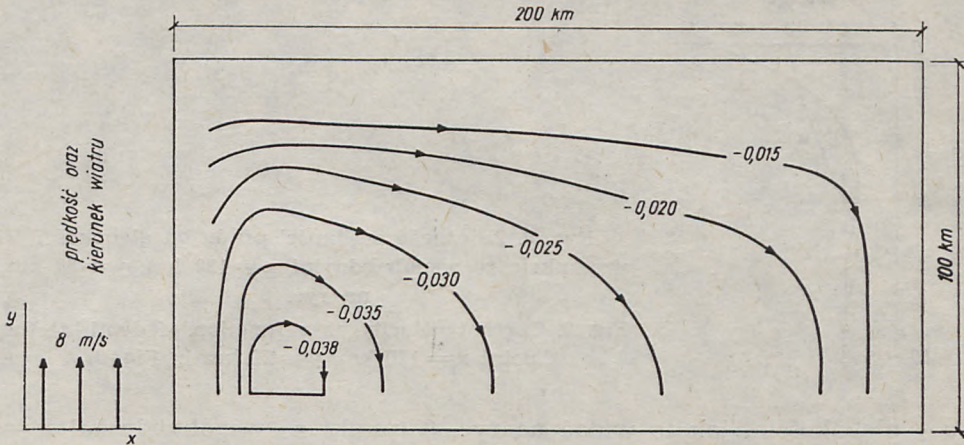
Uwzględniając te wyrażenia w równaniu (2.38) zmniejszymy dokładność obliczeń, co może być zrekomensowane zmniejszeniem odległości między węzłami siatki numerycznego całkowania. Wprowadzając wyrażenie (2.39) do równania (2.38) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Psi(i, k) = & \frac{1}{8r + 2(|a| + |b|)} [\Psi(j, k + 1) \cdot (2r + |b| - b) + \\ & + \Psi(j, k - 1) \cdot (2r + |b| + b) + \Psi(j + 1, k) \cdot (2r + |a| + a) + \\ & + \Psi(j - 1, k) \cdot (2r + |a| - a)] + \frac{(\Delta s)^2}{8r + 2(|a| + |b|)} F(j, k). \end{aligned} \quad (2.41)$$



Obliczona na podstawie równania (2.41) funkcja prądu została wykreślona na ryc. 7.

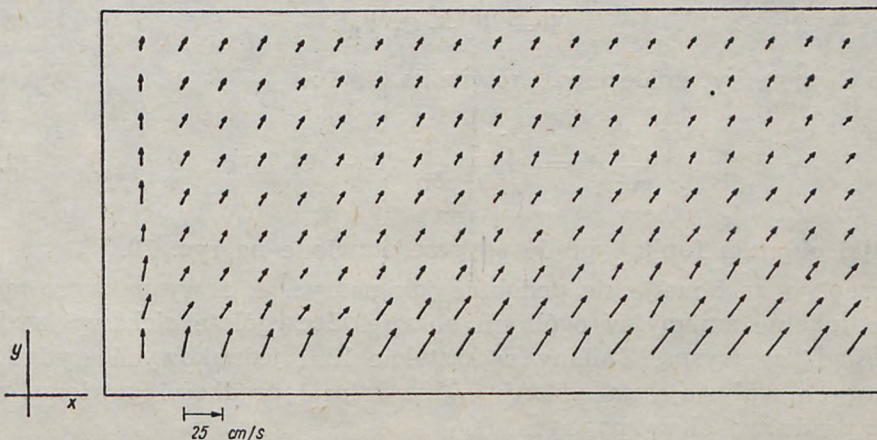
Ponieważ w modelu tym przyjęliśmy stałą prędkość wiatru, niejednorodności w rozkładzie funkcji prądu mogą być odniesione tylko do nachylenia dna.



Ryc. 7. Izolinie funkcji wydatków objętościowych w morzu z niejednorodną głębokością. Liczby na rycinie wyrażają wydatki w mln  $m^3/\text{sek}$

Fig. 7. Isolines of the function of volume transport in a sea with non-uniform depth. The numbers represent millions of  $\text{cbm}/\text{sec}$

Stosując dalej przyjętą poprzednio metodę, obliczamy prędkości prądu powierzchniowego ryc. 8). Zwiększone prędkości prądu zaobserwowano przy południowym brzegu morza.

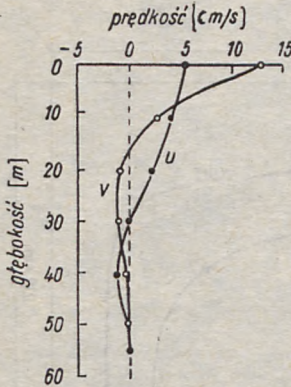


Ryc. 8. Rozkład prądu powierzchniowego odpowiadający rozkładowi wiatru z ryc. 7

Fig. 8. Surface current corresponding to the wind pattern in Fig. 7



Porównując ryc. 7 i 8 widzimy, że zarówno prąd powierzchniowy, jak i kierunek wydatku masowego mogą się znacznie różnić w obrębie omawianego obszaru. To zjawisko wypływa z szybkiej zmiany kierunku prą-



Ryc. 9. Zależność prędkości prądu od głębokości w punkcie ze współrzędnymi  $x = 120$  km,  $y = 20$  km, na ryc. 8

Fig. 9. Current velocity as a function of depth at the point  $x = 120$  km,  $y = 20$  km in Fig. 8

du z głębokością, jak to widać na ryc. 9 (punkt ze współrzędnymi  $x = 120$  km,  $y = 20$  km na ryc. 7 i 8).

### 6.3. Stała głębokość, silne zawirowania wiatru oraz obecność wyspy

Rozpatrzmy model przyjęty w podrozdziale: Stała głębokość oraz silne zawirowanie wiatru, wprowadzając dodatkowo wyspę (ryc. 10, 11). Obszar całkowania nie jest już jednorodny i rozwiązanie równania (2.28) przyjmuje postać:

$$\Psi = \Psi_0 + C_1 \Psi_1. \quad (2.42)$$

Stała  $C_1$  może być znaleziona z równania (2.23):

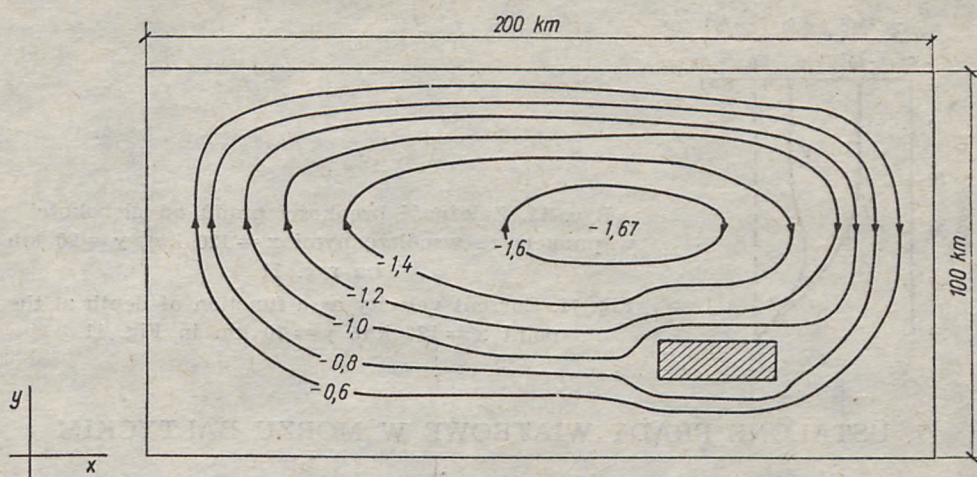
$$\oint_{\Gamma_1} \frac{\tau_s}{c^2} ds = \oint_{\Gamma_1} \frac{r}{c^2} \frac{\delta}{\delta n} (\Psi_0 + C_1 \Psi_1) ds. \quad (2.43)$$

Wyniki obliczeń funkcji prądu są przedstawione na ryc. 10.

Przepływ zachowuje się podobnie jak na ryc. 4, a wyspa wprowadza tylko lokalne zmiany w ogólnym obrazie. Szczególnie ciekawy wydaje się „śląd” za wyspą. Zmiany w kształcie linii jednakowych wydatków masowych wpływają na zmiany w kierunku i prędkości powierzchniowego prądu wokół wyspy (ryc. 11).

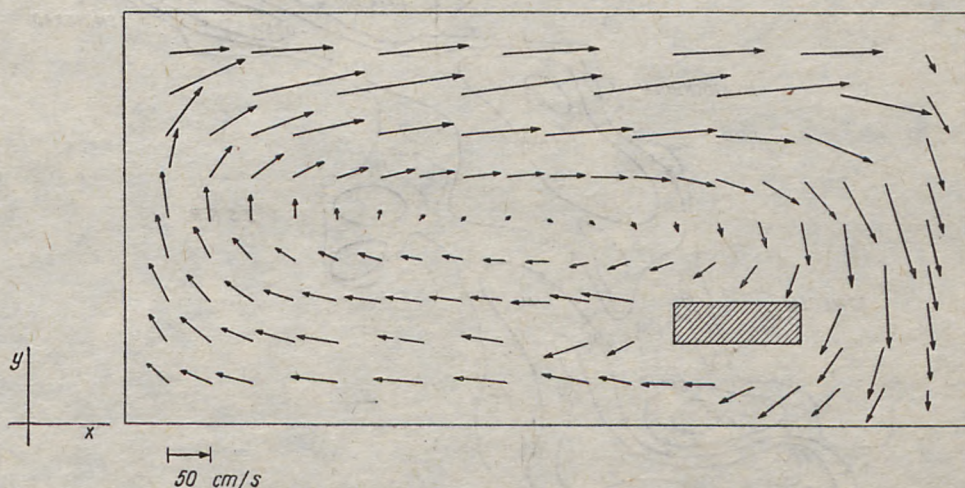
Niewielkim zmianom ulega też rozkład pionowy prądu, jak to można zaobserwować na ryc. 12.





Ryc. 10. Izolinie funkcji wydatków objętościowych w morzu z wyspą. Liczby na rycinie wyrażone są w mln m<sup>3</sup>/sek

Fig. 10. Isolines of the function of volume transport in a sea with an island. The numbers represent millions of cbm/sec

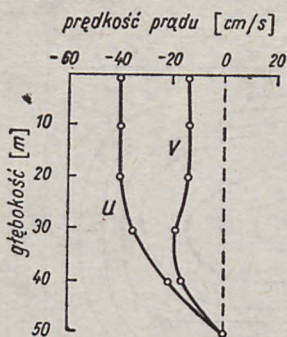


Ryc. 11. Rozkład prądów powierzchniowych

Fig. 11. Surface current in a sea with an island. Wind pattern and depth as Fig. 4

Wpływ wyspy zaobserwowany powyżej wydaje się potwierdzać hipotezę Stockmana (1966) o specjalnych rodzajach przepływów, które mają miejsce w pobliżu wysp.



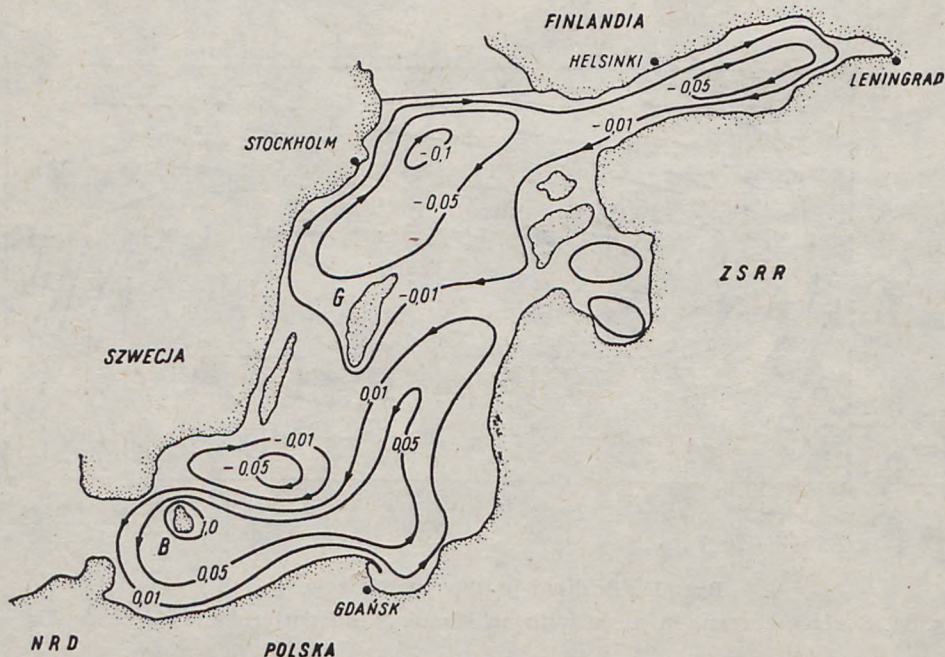


Ryc. 12. Zależność prędkości prądu od głębokości w punkcie ze współrzędnymi  $x = 120$  km,  $y = 20$  km na ryc. 11

Fig. 12. Current velocity as a function of depth at the point  $x = 120$  km,  $y = 20$  km in Fig. 11

## 7. USTALONE PRĄDY WIATROWE W MORZU BAŁTYCKIM

Zajmiemy się teraz bardziej realistycznym przypadkiem i obliczymy rozkład prądów w południowym i środkowym Bałtyku (odrzucając Zatokę Botnicką). Przyjmując jako wymiary „oczek” siatki numerycznych



Ryc. 13. Izolinie funkcji wydatków objętościowych dla Morza Bałtyckiego, wiatr W 10 m/sek. Liczby na rycinie wyrażone są w mln  $m^3$ /sek

Fig. 13. Isolines of the function of volume transport in the Baltic, wind W 10 m/sec. The numbers represent millions of  $cbm/sec$



obliczeń 20 km uwzględniamy dwie wyspy w akwencie bałtyckim: Bornholm (B) i Gotland (G) (ryc. 13). Przeanalizowano dwa przypadki. W pierwszym założono stały wiatr zachodni — W 10 m/sek, w drugim zaś północny — N 10 m/sek. W obu przypadkach w prawej części równania (2.12) występują tylko wyrażenia związane ze wzajemnym oddziaływaniem stycznego naprężenia wiatru i nachylenia dna.

Rozwiązanie dla funkcji prądu wydatku masowego jest sumą trzech wyrażeń:

$$\Psi = \Psi_0 + C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2. \quad (2.44)$$

Rozwiązując dwa równania liniowe (równania 2.23) otrzymamy stałe  $C_1$  i  $C_2'$ .

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{\tau_s}{c^2} ds = \oint_{\Gamma_1} \frac{r}{c^2} \cdot \frac{\delta}{\delta n} (\Psi_0 + C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2) ds \quad (2.45 a)$$

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{\tau_s}{c^2} ds = \oint_{\Gamma_2} \frac{r}{c^2} \cdot \frac{\delta}{\delta n} (\Psi_0 + C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2) ds. \quad (2.45 b)$$

Zasadnicza różnica między rozwiązaniem (2.44) a rozwiązaniem otrzymanym w podrozdziale. Niektóre uproszczone modele nie wynikają tylko z obecności drugiej wyspy na wybranym akwencie, ale przede wszystkim z bardziej urozmaiconego nachylenia dna. Nachylenie dna w Bałtyku zmienia się od wartości dodatnich do ujemnych i we wzajemnym oddziaływaniu z naprężeniem stycznym wiatru daje skomplikowaną postać rozwiązania dla funkcji prądu.

W pierwszym przypadku, kiedy wiatr jest z kierunku zachodniego, obraz funkcji prądu wyprowadzony na podstawie równania (2.12) przedstawiony jest na ryc. 13.

Człon wzajemnego oddziaływania w równaniu (2.12) ma postać:

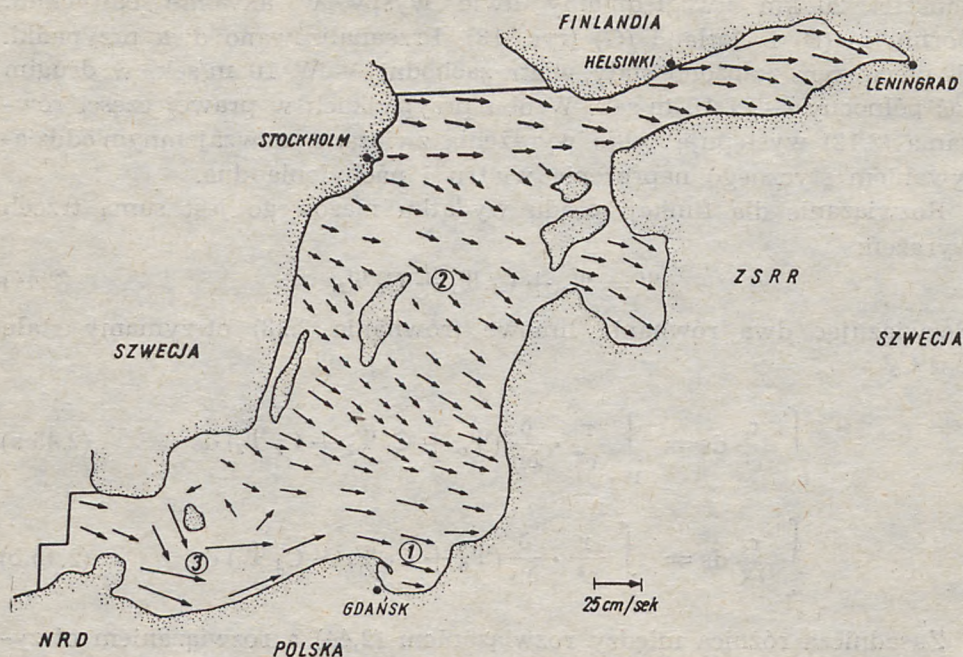
$$\tau_x \cdot \frac{\delta H}{\delta y} \cdot \frac{1}{H}, \text{ a zatem znak tego wyrażenia zależy od } \frac{\delta H}{\delta y}.$$

Analizując głębokość Bałtyku widzimy, że rośnie ona w pobliżu wyspy Gotland, gdzie osiąga maksimum, tutaj też  $\frac{\delta H}{\delta y} \cong 0$  i stąd tworzą się

dwa układy prądów (ryc. 13), w których ruch odbywa się w przeciwnych kierunkach. W północnej części morza ruch odbywa się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, w części południowej zaś w kierunku odwrotnym. Niewielkie wiry (np. w Zatoce Fińskiej) są związane z lokalnymi zmianami nachylenia dna.

Wykorzystując obliczone wartości funkcji wydatków masowych, z łatwością otrzymamy rozkład prądów powierzchniowych (ryc. 14).





Ryc. 14. Prądy powierzchniowe, wiatr W 10 m/sec

Fig. 14. Surface currents, wind w 10 m/sec

Na przeważającym obszarze morza prędkości prądu powierzchniowego występują w przedziale od 10 do 20 cm/sec. Jedynie w okolicy wyspy Bornholm mają one większą amplitudę i osiągają wartości 50—40 cm/sec. W tym miejscu zauważa się również zmianę kierunku prądu od ogólnej cyrkulacji.

Pionowy rozkład prądu obrazuje ryc. 15 (punkty 1, 2, 3 na ryc. 14).

W punktach 1 i 2 zachodzi silna transformacja prądu. Prawdopodobnie wywołane jest to różnicą w przebiegu dwóch składowych prądu (prąd wywołany naprężeniem stycznym zanika szybciej z głębokością niż prąd związany z nachyleniem powierzchni morza). W punkcie 3, gdzie głębokość jest nieznaczna (40 m), kierunek prądu nie zmienia się od powierzchni do dna.

Wykonano również obliczenia dla drugiego przypadku. Przy wietrze N 10 m/sec naprężenie styczne wiatru występuje we wzajemnym oddziaływaniu E—W składowej nachylenia dna  $\left(\frac{\delta H}{\delta x}\right)$ . Obserwujemy znów

dwa duże układy prądów (ryc. 16) jeden w południowej części akwenu wirujący zgodnie z ruchem wskazówek zegara, drugi w części zachodniej wirujący w kierunku przeciwnym.

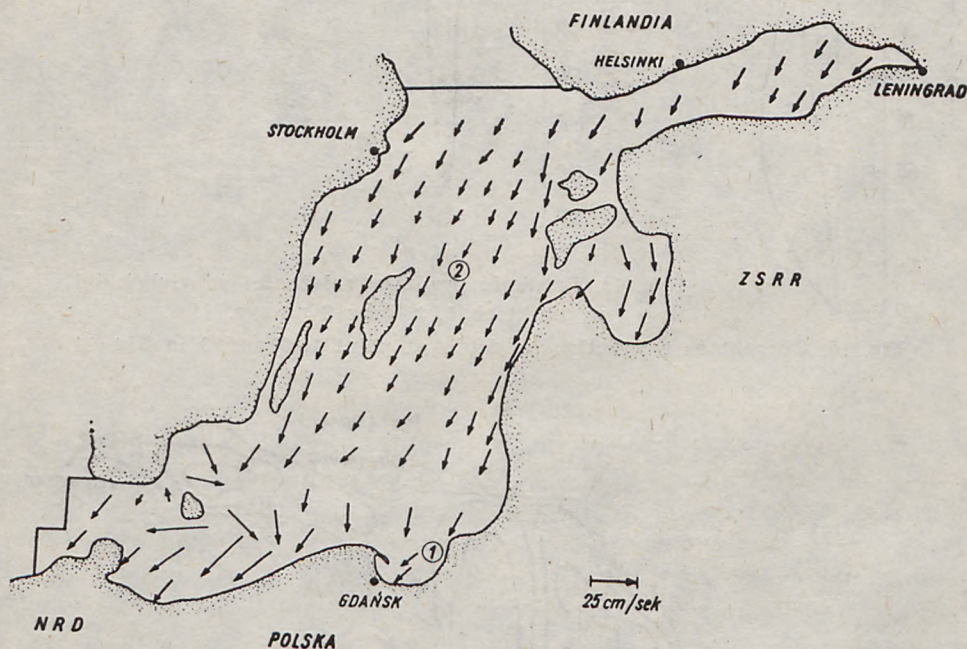






Przepływ wokół Bornholmu i w Zatoce Fińskiej odbiega od ogólnego obrazu i jak poprzednio zjawisko to wywołane jest lokalnym nachyleniem dna.

Prąd powierzchniowy, odpowiadający powyższym obliczeniom wydatku, przedstawiono na ryc. 17. Prędkości prądu są podobne jak w poprzednim przypadku 10—20 cm/sek, a w basenie Bornholmskim 5—50 cm/sek.



Ryc. 17. Prądy powierzchniowe, wiatr N 10 m/sek

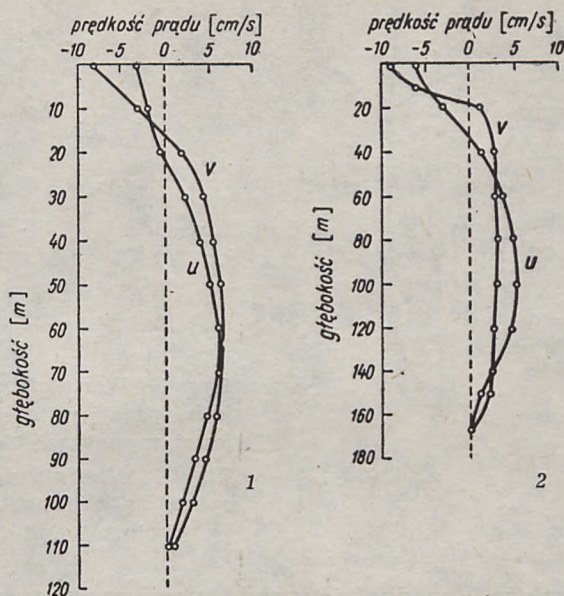
Fig. 17. Surface currents, wind N 10 m/sec

Jak wynika z ryc. 13 i 16, charakter przepływów wokół Bornholmu wskazuje na odchylenia od ogólnego obrazu cyrkulacji mas wodnych w południowym i środkowym Bałtyku, toteż otrzymane rezultaty numeryczne należy analizować ostrożnie, gdyż wymiary „oczek” siatki (20 km) są zbliżone do wymiarów tej wyspy. Stąd numeryczna ocena całek (2.45) może wprowadzić znaczny błąd.

W celu uzupełnienia powyższego opisu przedstawiono na ryc. 18 (punkt 1, 2 na ryc. 17) rozkład pionowy prędkości prądu.

Podobnie jak poprzednio prąd ulega znacznej transformacji z głębokością. Aby wyjaśnić to zjawisko, rozdzielamy prąd na dwie składowe: zależną od naprężenia stycznego wiatru ( $v_s$ ) i zależną od nachylenia po-





Ryc. 18. Prędkość prądu w zależności od głębokości w punktach 1 oraz 2 na ryc. 17

Fig. 18. Current as a function of depth at the points 1 and 2 in Fig. 17

wierzchni morza ( $v_s$ ). Wartości bezwzględne tych składowych przedstawiono na ryc. 19.

Obserwujemy tutaj ważne zjawisko teorii Ekmana — istnienie dwóch warstw przyściennych; jedna dla składowej  $v_r$  przy powierzchni oraz druga dla składowej  $v_s$  przy dnie. W teorii Ekmana warstwa przyścienna związana jest z głębokością tarcia ( $D$ ), gdzie:

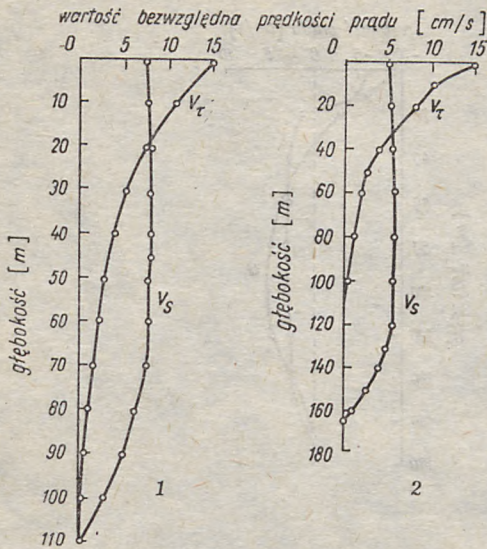
$$D = \left( \frac{2k}{f} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.46)$$

Ponieważ głębokości ( $H$ ) wynoszą 110 m w punkcie 1 oraz 165 m w punkcie 2, a prędkość wiatru 10 m/sek, możemy zastosować wyrażenie (2.25) dla określenia współczynnika lepkości burzliwej  $k$ . W ten sposób otrzymamy  $D \cong 97$  m; na tej głębokości  $v_r$  praktycznie równa jest 0 (ryc. 19).

Warstwa przyścienna w pobliżu dna, od której zależy składowa  $v_s$ , może być scharakteryzowana tarcie przydennym. Aby znaleźć głębokość tarcia przy dnie za pomocą wyrażenia (2.46) należy znać wartość  $k$ , która z kolei zależy od wiatru.

Prędkość wiatru określamy z empirycznej relacji (Ekman 1905, Fel-





Ryc. 19. Wartości bezwzględne prędkości prądu w zależności od głębokości w punktach 1 oraz 2 na ryc. 17  
 Fig. 19. Absolute values of current speed as a function of depth at points 1 and 2 in Fig. 17

zenbaum 1960) między prędkością prądu powierzchniowego  $v$  i prędkością wiatru nad morzem ( $W$ ):

$$\frac{v}{W} \cong 1,5 \cdot 10^{-2} \quad (2.47)$$

Wyobraźmy sobie, że składowa prądu związana z nachyleniem powierzchni morza (ryc. 19) jest wywołana wiatrem wiejącym przy dnie zbiornika, a powierzchnia morza przyjmuje rolę dna. Przez takie odwrócenie ryc. 19 wartość prądu „powierzchniowego” w punkcie 1 wynosi 7 cm/sek, stosując wzór (2.47) otrzymujemy prędkość wiatru  $W = 4,7$  m/sek, a głębokość tarcia (wyrażenie 2.46) wynosi  $D \cong 45$  m. W punkcie 2 wartość prądu „powierzchniowego” równa się 5 cm/sek, co odpowiada głębokości tarcia  $D \cong 32$  m. Powyższe wartości głębokości tarcia są zgodne z biegiem składowych  $v_s$  na ryc. 19.

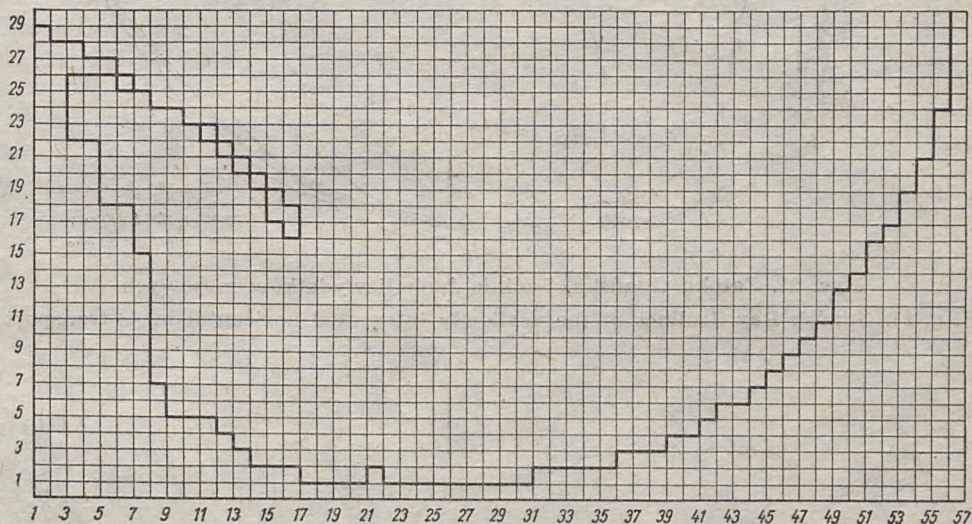
## 8. USTALONE PRĄDY WIATROWE ZATOKI GDAŃSKIEJ

Zatoka Gdańska, mimo że stanowi wyraźnie wyodrębnioną zarysem linii brzegowej część Bałtyku i posiada charakterystyczne dla niej warunki hydrologiczne, nie może być uważana w obliczeniach prądów wiatrowych za niezależną część basenu z powodu silnej wymiany wód z otwartym morzem. Prądy w Zatoce są w znacznym stopniu kontynuacją zjawisk zachodzących w południowym Bałtyku. W obliczeniach dalej przedstawionych prądy otwartego akwenu zostały wprowadzone do



równań jako warunki graniczne na linii Rozewie — Taran. Oczywiście jest, że przy obliczeniach prądów dla wiatru S w Zatoce jako warunki graniczne uwzględniano prądy powstałe podczas działania tego samego wiatru nad południowym Bałtykiem.

Tę samą zasadę zastosowano dla pozostałych kierunków wiatru. Obliczenia wykonano za pomocą siatki obliczeń numerycznych przedstawionej na ryc. 20. Prądy w Zatoce ujęto za pomocą dwóch rodzajów map.



Ryc. 20. Siatka obliczeń numerycznych ustalonych prądów wiatrowych dla Zatoki Gdańskiej

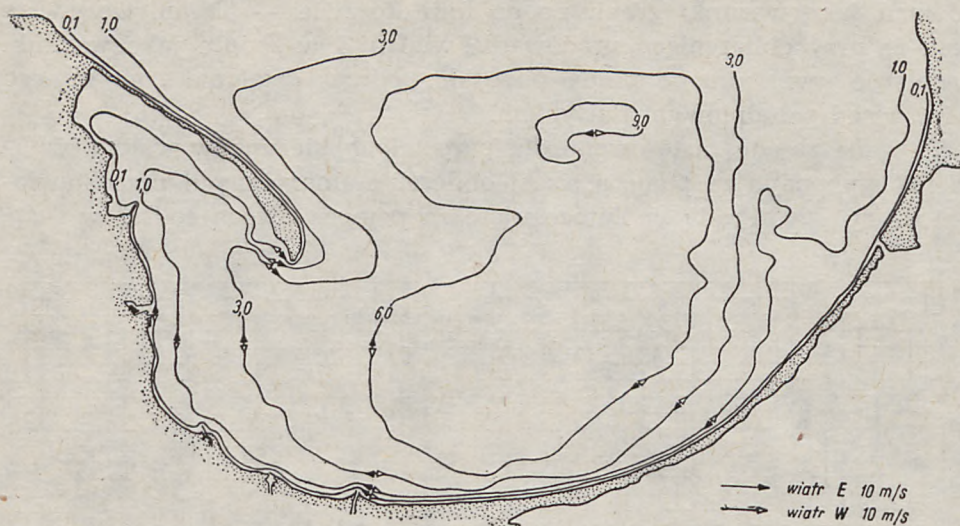
Fig. 20. Grid system covering Gdańsk Bay

Mapy funkcji wydatków objętościowych przedstawiają wskaźnikowo średnią prędkość prądu od powierzchni do dna. Liczby przy izoliniach funkcji wydatków objętościowych wyrażone są w  $10^4$  m<sup>3</sup>/sek.

Poprzednio na tego rodzaju mapach dla Bałtyku rozróżniano dodatnie i ujemne znaki funkcji wydatków objętościowych w zależności od kierunku cyrkulacji. Na mapach Zatoki Gdańskiej podano bezwzględne wartości tej funkcji, zaznaczając tylko w legendzie kierunek cyrkulacji dla danego wiatru. Wykorzystano w tym wypadku symetrię układu dla wiatrów różniących się o 180°, zamieszczając na jednej mapie cyrkulację dla wiatrów W i E (ryc. 21) oraz na drugiej dla wiatrów N i S (ryc. 22).

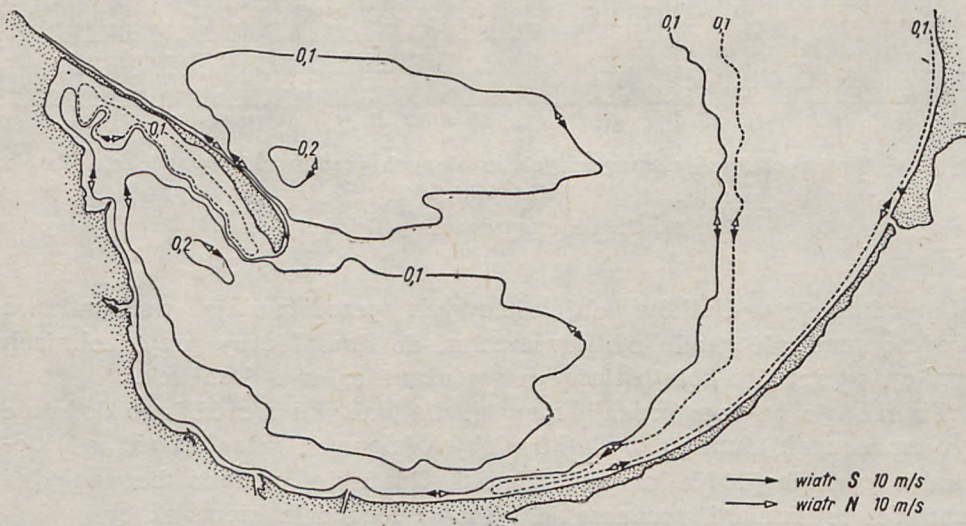
Opisane mapy mogą być interpretowane jako średnie kierunki prądów wskazujące główne tendencje przemieszczania mas wodnych. Mapy prądów powierzchniowych opracowano oddzielnie dla czterech podsta-





Ryc. 21. Zatoka Gdańska. Izolinie funkcji wydatków masowych

Fig. 21. Gdańsk Bay. Isolines of the vertically integrated horizontal mass transport



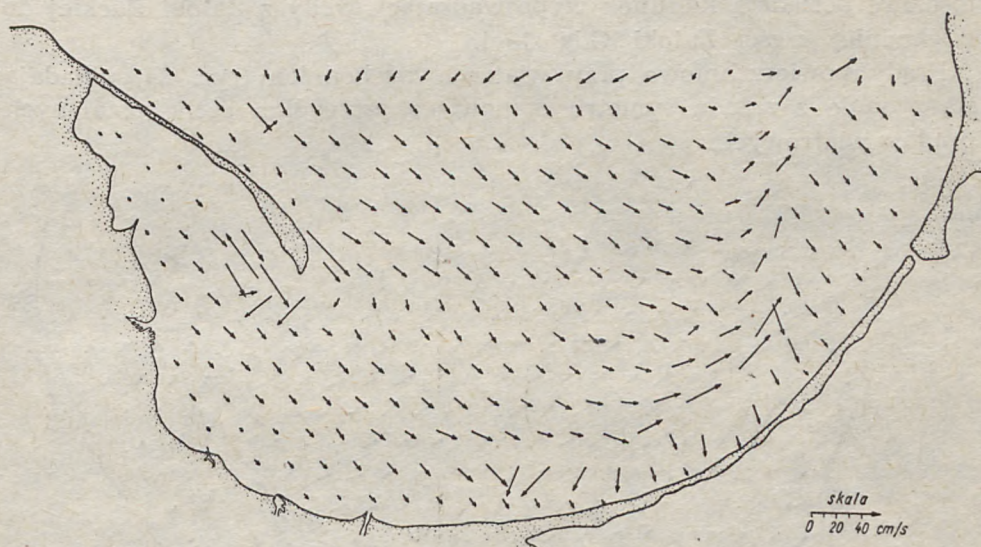
Ryc. 22. Zatoka Gdańska. Izolinie funkcji wydatków masowych

Fig. 22. Gdańsk Bay. Isolines of the vertically integrated horizontal mass transport

wowych kierunków wiatru, charakteryzując prądy za pomocą wektorów. Ze względu na małą skalę map wektory nanoszono co drugą liczbą porządkową przyjętej siatki obliczeń numerycznych. Spowodowało to



nieznaczną schematyzację sytuacji prądowej, co szczególnie widoczne jest w miejscach zawirowań. Na mapach podano liniową podziałkę prędkości prądów. Przytoczymy teraz bardziej szczegółowy opis sytuacji cyrkulacyjnych. Wiatry zachodnie wywołują prądy powierzchniowe (ryc. 23),



Ryc. 23. Zatoka Gdańska. Prądy powierzchniowe, wiatr W 10 m/sec  
 Fig. 23. Gdańsk Bay. Surface currents, wind W 10 m/sec

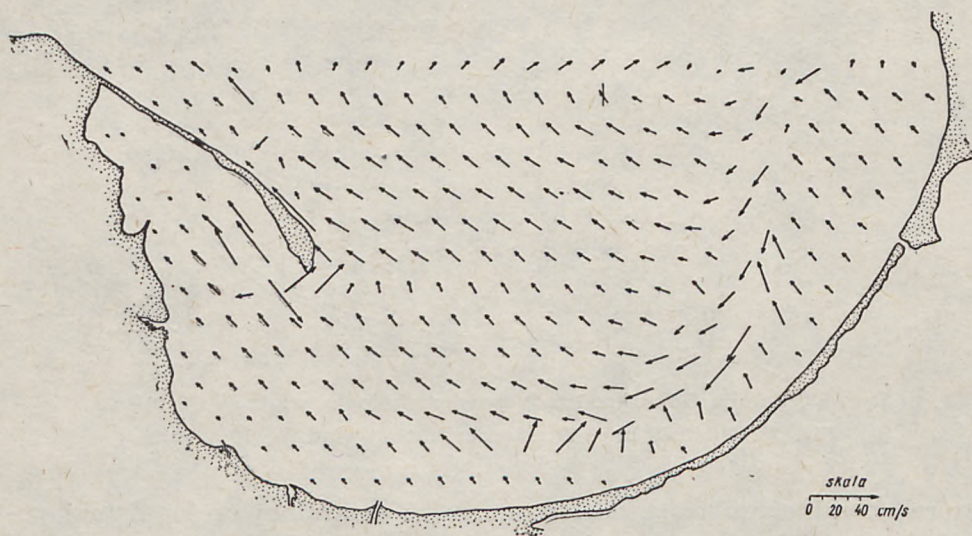
które charakteryzują się zawirowaniem w centralnej części Zatoki powodującym skierowanie prądów na granicy otwartej pod wiatr, a następnie wyprowadzenie z Zatoki wektorami ułożonymi równolegle wzdłuż Mierzei Wiślanej. Prądy wyprowadzające wody z Zatoki występują jednak w dość dużej odległości od brzegu. Między brzegiem a prądem wyprowadzającym położona jest strefa, gdzie wektory prądów układają się zgodnie z wiatrem i kierunkiem działania siły Coriolisa. Wprowadzenie wód do Zatoki odbywa się na dużym obszarze części centralnej i zachodniej akwenu.

Należy podkreślić, że strefa prądu wyprowadzającego z Zatoki na wszystkich mapach prądów powierzchniowych charakteryzuje się zaburzeniami wskazującymi wpływ ogólnej cyrkulacji na prądy powierzchniowe. Drugą strefą zaburzeń regularnego przebiegu wektorów są obszary położone przy końcu Półwyspu Helskiego po jego wewnętrznej stronie, w mniejszym stopniu wzdłuż brzegu półwyspu od strony pełnego morza. Zawirowania po wewnętrznej stronie półwyspu są bardzo silne. W miejscu tym występują maksymalne szybkości prądów.



Izolinie funkcji wydatków objętościowych wykazują jednolitą cyrkulację dla całej Zatoki skierowaną przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Skupienie izolinii można zaobserwować w rejonie przekopu Wisły oraz po wewnętrznej stronie Półwyspu Helskiego. W tych miejscach prądy posiadają największe wydatki. W rejonie Trójmiasta wydatki objętościowe posiadają kierunek wyprowadzający wody z Zatoki Puckiej do wschodniej części Zatoki Gdańskiej.

Prądy powierzchniowe przy wiatrach wschodnich (ryc. 24) układają się zgodnie z zasadą symetrii stanowiącą szczególną cechę ustalonych prądów wiatrowych.



Ryc. 24. Zatoka Gdańska. Prądy powierzchniowe, wiatr E 10 m/sec

Fig. 24. Gdańsk Bay. Surface currents, wind E 10 m/sec

W części centralnej Zatoki Gdańskiej występują podobne zawirowania jak przy wiatrach zachodnich o odwróconym kierunku. W pewnej odległości od brzegu — wzdłuż Mierzei Wiślanej — występuje prąd wprowadzający wody do Zatoki. Wyprowadzenie wód w części centralnej Zatoki i wzdłuż zewnętrznej krawędzi Półwyspu Helskiego nie jest tak skupione i odbywa się na dużym obszarze. Zawirowania występują przy końcu Półwyspu Helskiego łącznie z prądami układającymi się wzdłuż półwyspu po jego zewnętrznej stronie. Przebieg izolinii funkcji wydatków objętościowych wykazuje dla całej Zatoki jednolitą cyrkulację, zgodną z ruchem wskazówek zegara. Miejsca zbieżności izolinii są identyczne jak dla wiatrów zachodnich. Średnia prędkość prądów powierzchniowych dla wiatrów W i E w centralnej części Zatoki wynosi około



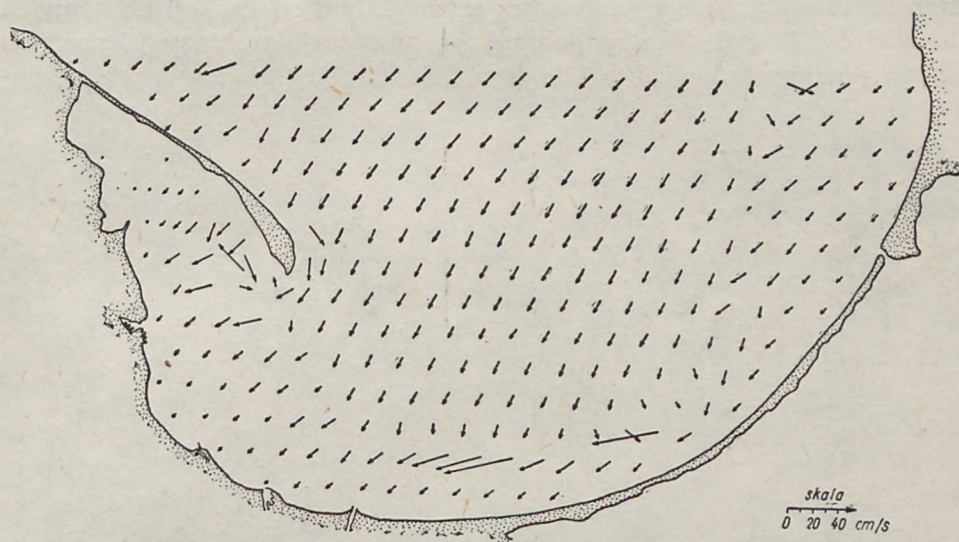
15 cm/sek. Dla porównania obliczymy prędkość prądu według stosowanego powszechnie wzoru empirycznego:

$$V = 1,5 W \quad (2.48)$$

$$V = 1,5 \cdot 10 = 15 \text{ cm/sek,}$$

gdzie:  $V$  — prędkość prądu w cm/sek,  $W$  — prędkość wiatru w m/sek.

Obliczenia wzorem empirycznym i przyjętym modelem hydrodynamicznym wykazują wyniki identyczne w tych miejscach Zatoki, gdzie na prędkość prądów nie wpływa bezpośrednio ekspozycja brzegów. Wiatry północne powodują układ prądów powierzchniowych (ryc. 25) wykazu-



Ryc. 25. Zatoka Gdańska. Prądy powierzchniowe, wiatr N 10 m/sek

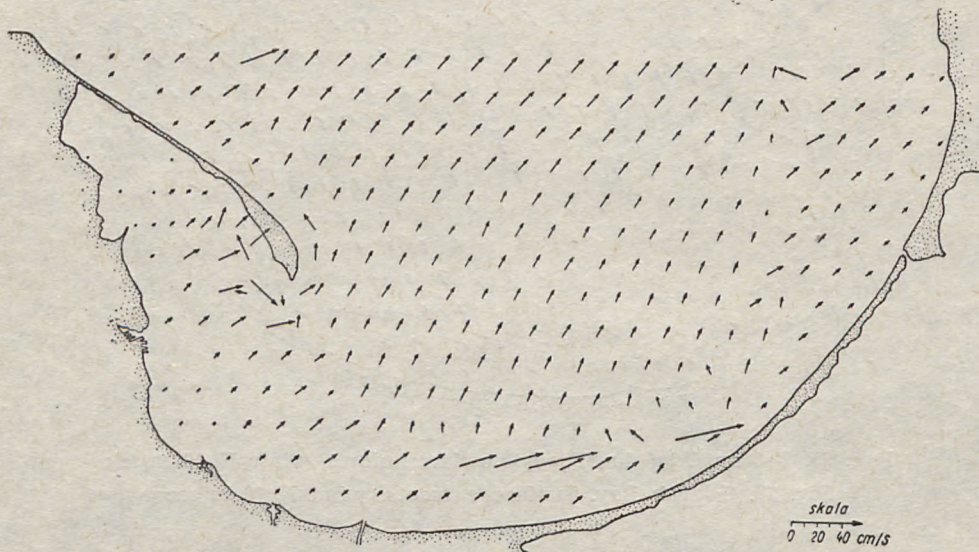
Fig. 25. Gdańsk Bay. Surface currents, wind N 10 m/sec

jący w zasadzie jednolitą sytuację dla całej Zatoki Gdańskiej z wyjątkiem wewnętrznej strony cypla Półwyspu Helskiego, gdzie występują silne zawirowania. Miejsca, w których występowały duże oddziaływania wydatków objętościowych, przy wiatrach W i E, wykazują również odchylenia od orientacji wektorów prądu w centralnej części Zatoki, ale odchylenia te są lokalne i nie zmieniają ogólnego obrazu prądów, które są zgodne z kierunkiem wiatru i siłą Coriolisa.

Izolinie funkcji wydatków objętościowych mają przebieg bardziej skomplikowany od poprzedniego, opisanego dla wiatrów W i E. W części centralnej Zatoki cyrkulacja jest przeciwna ruchowi zegara, a w części wschodniej Zatoki cyrkulacja wzdłuż brzegu jest zgodna z tym ru-



chem. Podobna cyrkulacja — zgodna z ruchem wskazówek zegara — występuje wzdłuż wewnętrznej krawędzi Półwyspu Helskiego. W Zatoce wyróżnić więc można trzy odrębne układy cyrkulacyjne. Interesujące jest, że granica pomiędzy tymi układami we wschodniej części Zatoki odpowiada zaburzeniom w przebiegu prądów powierzchniowych, które w tym rejonie można zaobserwować przy wszystkich kierunkach wiatru. Jest to niewątpliwie spowodowane wzajemnym oddziaływaniem naprężenia stycznego wiatru oraz nachylenia dna (patrz prawa strona równania 2.12). W rejonie Trójmiasta prądy gradientowe powodują przemieszczania mas wodnych wzdłuż brzegu w rejon wschodni Zatoki. Funkcje wydatków objętościowych wyrażone w  $10^4 \text{ m}^3/\text{sek}$  są w tym wypadku przeszło czterokrotnie mniejsze w centralnej części Zatoki od funkcji obliczonych dla wiatrów W i E. Wiatry południowe odwracają wektory północnych prądów powierzchniowych o  $180^\circ$  (ryc. 26). Przebieg prądów o powierzch-



Ryc. 26. Zatoka Gdańska. Prądy powierzchniowe, wiatr S 10 m/sek

Fig. 26. Gdańsk Bay. Surface currents, wind S 10 m/sec

niowych pozostaje więc w zasadzie jednolity dla całego akwenu z wykazanymi przy prądach północnych miejscami zawirowania i wpływu wydatków objętościowych. Izolinie funkcji wydatków objętościowych wykazują również opisaną powyżej symetrię. W rejonie Trójmiasta wydatki są skierowane wzdłuż brzegu do Zatoki Puckiej. Średnie prędkości prądów w centralnej części Zatoki dla wiatrów N i S wynoszą około 13 cm/sek.



9. NIEKTÓRE ZAGADNIENIA MATEMATYCZNE  
ZWIĄZANE Z RÓWNANIEM WYDATKÓW OBJĘTOŚCIOWYCH  
DLA USTALONYCH PRĄDÓW WIATROWYCH

Pewne szczegóły dotyczące stosowanych metod rozwiązań oraz ich dokładności celowo były pomijane w trakcie poprzedniego wykładu, aby kwestie fizyczne nie były zaciemniane przez zbyt skomplikowane rozważania matematyczne.

Rozpatrzmy równanie wydatków objętościowych (2.12), które zapiszemy teraz w postaci:

$$L(\psi) = r\Delta\psi + a(x, y) \frac{\delta\psi}{\delta x} + b(x, y) \frac{\delta\psi}{\delta y} = c(x, y), \quad (2.49)$$

gdzie:  $r > 0$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — dane i ciągłe funkcje w obszarze domkniętym  $\bar{D}$ , przy czym  $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1_1; 0 \leq y \leq 1_2\}$ . W obszarze  $\bar{D}$  wprowadzimy siatkę obliczeń numerycznych o kroku  $h$ . W ten sposób otrzymamy domknięty obszar siatkowy  $\bar{D}_h = \{x_j = jh; y_k = kh\}$ .

Granicę obszaru  $\bar{D}$  oznaczmy jako  $\Gamma$ , a granicę obszaru siatkowego  $\bar{D}_h$  oznaczmy  $\Gamma_h$ . Funkcja  $\psi$  jest znana na granicy i równa  $\psi|_{\Gamma} = 0$ .

Wprowadzimy teraz związek między postacią różniczkową i różnicową pierwszych i drugich pochodnych funkcji  $\psi$ .

Wprowadzając szereg Taylora dla dowolnych węzłów siatki  $j$  oraz  $j+1$  możemy zapisać różnicę przednią:

$$\psi(j+1, k) - \psi(j, k) = \frac{\delta\psi}{\delta x} h + \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} \quad (2.50)$$

oraz dla węzłów  $j-1, j$  różnicę wsteczną:

$$\psi(j, k) - \psi(j-1, k) = \frac{\delta\psi}{\delta x} h - \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} \quad (2.51)$$

Różnicom tym odpowiadają trzy typy pochodnych:

a) przednia:

$$\psi_x = \frac{\psi(j+1, k) - \psi(j, k)}{h} = \frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}, \quad (2.52)$$

b) wsteczna:

$$\psi_x^- = \frac{\psi(j, k) - \psi(j-1, k)}{h} = \frac{\delta\psi}{\delta x} - \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}, \quad (2.53)$$



c) centralna:

$$\Psi_{\tilde{x}} = \frac{\psi(j+1, k) - \psi(j-1, k)}{2h} = \frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{h^2}{2 \cdot 3!} \left( \overline{\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}} + \overline{\overline{\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}}} \right). \quad (2.54)$$

Drugą pochodną otrzymamy odejmując wyrażenie (2.51) od (2.50):

$$\begin{aligned} \Psi_{xx} &= \frac{\psi(j+1, k) + \psi(j-1, k) - 2\psi(j, k)}{h^2} = \\ &= \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{h}{3!} \left( \overline{\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}} - \overline{\overline{\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}}} \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

W wyrażeniach (2.51 — 2.55) kreski nad pochodnymi oznaczają wartości pochodnych w pewnym wewnętrznym punkcie odcinka  $j, j+1$ . Analogiczne wzory mogą być zapisane dla pochodnych względem zmiennej niezależnej  $y$ .

Dla dowolnego wewnętrznego węzła obszaru  $D_h$  zapiszemy teraz równanie różnicowe odpowiadające równaniu różniczkowemu (2.49); w ten sposób, aby dobierając odpowiednio wsteczną lub przednią pochodną w zależności od znaku współczynników  $a$  i  $b$  zapewnić zbieżność procesów iteracji:

$$L_h\psi = r(\psi_{\tilde{xx}} + \psi_{\tilde{yy}}) + a^+\psi_x + \bar{a}\psi_x + b^+\psi_y + \bar{b}\psi_y = C_h. \quad (2.56)$$

$$Z \text{ warunkiem brzegowym } \psi|_{\Gamma_h} = 0, \quad (2.57)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a^+ &= \frac{a + |a|}{2} & \bar{a} &= \frac{a - |a|}{2}, \\ b^+ &= \frac{b + |b|}{2} & \bar{b} &= \frac{b - |b|}{2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ustanowimy teraz twierdzenie, które określa związek równania (2.56) i (2.49).

#### Twierdzenie 1

Niechaj  $\psi$  będzie funkcją posiadającą pochodne — włącznie do trzeciej pochodnej — względem  $x$  oraz  $y$  w obszarze  $D$ , wówczas  $L_h\psi \rightarrow L\psi$  pod warunkiem, że  $h \rightarrow 0$ .

#### Dowód

Podstawmy do równania (2.56) wyrażenia (2.50—2.55), w rezultacie otrzymamy:

$$L_h\psi = r \left[ \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{h}{3!} \left( \overline{\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}} - \overline{\overline{\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}}} \right) \right] +$$



$$\begin{aligned}
& a^+ \left( \frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{h}{2} \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{h^2}{3!} \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} \right) + \\
& + a^- \left( \frac{\delta\psi}{\delta x} - \frac{h}{2} \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{h^2}{3!} \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} \right) + r \left[ \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{h}{3!} \left( \frac{\delta^3\psi}{\delta y^3} - \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} \right) \right] \\
& + b^+ \left( \frac{\delta\psi}{\delta y} + \frac{h}{2} \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} + \frac{h^2}{3!} \frac{\delta^3\psi}{\delta y^3} \right) + \\
& + b^- \left( \frac{\delta\psi}{\delta y} - \frac{h}{2} \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} + \frac{h^2}{3!} \frac{\delta^3\psi}{\delta y^3} \right) = \\
& = L\psi + \frac{rh}{3!} \left( \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} + \frac{\delta^3\psi}{\delta y^3} - \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} - \frac{\delta^3\psi}{\delta y^3} \right) + \\
& + \frac{h}{2} \left( |a| \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + |b| \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} \right) = L\psi + Rh, \tag{2.59}
\end{aligned}$$

gdzie:  $R$  — wielkość ograniczona i niezależna od  $h$ .

$$A \text{ zatem: } |L\psi - L_h\psi| \leq Rh, \tag{2.60}$$

stąd otrzymujemy  $L_h\psi \rightarrow L\psi$ , kiedy  $h \rightarrow 0$ .

Zauważymy też, jak — wynika to z wyrażenia (2.60) — rząd aproksymacji równania różniczkowego za pomocą równania różnicowego jest proporcjonalny do  $h$ .

Przejdźmy teraz z kolei do pewnych zagadnień związanych z rozwiązaniem numerycznym równania (2.56).

Równanie (2.56) zapisane w obszarze siatkowym przedstawia układ równań liniowych:

$$\begin{aligned}
\psi_k &= a_{kj} \psi_j + b_k \tag{2.61} \\
& \left\{ \begin{array}{l} k = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, q \end{array} \right.
\end{aligned}$$

gdzie:  $a_{kj}$  — macierz współczynników.

Rozwiązując równanie (2.61) metodą iteracji możemy zapisać:

$$\psi_k^{(m)} = a_{kj} \psi_j^{(m-1)} + b_k \tag{2.62}$$

lub w postaci procesu Seidla:

$$\psi_k^{(m)} = \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} \psi_j^{(m)} + \sum_{j=k}^q a_{kj} \psi_j^{(m-1)} + b_k, \tag{2.63}$$

gdzie:  $m$  — numer kolejnej iteracji.

Wykażemy teraz zbieżność procesów iteracyjnych (2.62) i (2.63), tzn. wykazemy, że przy  $m \rightarrow \infty$ ,  $\psi_k \rightarrow \psi_k^{(m)}$  gdzie  $\psi_k$  — rozwiązanie dokładne zagadnienia sformułowanego równaniami (2.56, 2.57).



Wprowadzimy różnice  $m$ -tego przybliżenia  $v_k^{(m)} = \psi_k - \psi_k^{(m)}$ . Oczywiście jest, że  $v_k^{(m)}$  spełniają równania jednorodne (2.62) i (2.63). Przyjmiemy definicję normy wektora w postaci:

$\|v_k^{(m)}\| = \text{Max}_k |v_k^{(m)}|$ , normy macierzy zaś:

$$\|a_{ij}\| = \text{Max}_i \sum_{j=1}^q |a_{ij}| = \mu.$$

Poza tym założymy, że:

$$\text{Max}_k |v_k^{(0)}| = A < \infty. \quad (2.64)$$

Przedyskutujemy najpierw proces iteracji wyrażony równaniem (2.62), mamy tutaj:

$$v_k^{(m)} = a_{kj} v_k^{(m-1)} \quad (2.65)$$

lub wprowadzając normę:

$$\|v_k^{(m)}\| \leq \|a_{kj}\| \cdot \|v_k^{(m-1)}\| \leq \mu^m A,$$

stąd warunek zaniku różnicy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|v_k^{(m)}\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu^m \quad (2.66)$$

spełniony jest przy  $\mu < 1$ .

Dla równania (2.63) zapiszemy:

$$\|\psi_k^{(m)}\| \leq \mu_1 \|\psi_k^{(m)}\| + \mu_2 \|\psi_k^{(m-1)}\|, \quad (2.67)$$

gdzie:

$$\mu_1 = \text{Max}_k \sum_{j=1}^{k-1} \|a_{kj}\|,$$

$$\mu_2 = \text{Max}_k \sum_{j=k}^q |a_{kj}|.$$

Uwzględniając (2.67) otrzymamy:

$$\|\psi_k^{(m)}\| = \frac{\mu_2}{1 - \mu_1} \|\psi_k^{(m-1)}\| = \left( \frac{\mu_2}{1 - \mu_1} \right)^m \cdot A. \quad (2.68)$$

A zatem zbieżność iteracji przedstawionej równaniem (2.68) zachodzi przy:

$$\mu_1 + \mu_2 < 1.$$

Dokładniejsze sprecyzowanie założeń odnośnie do współczynników  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  i  $\mu$  zawarte jest w pracy Faddeovej (1959).



Analizując bardziej szczegółowo równanie (2.56) w postaci rozwiniętej (2.59) stwierdzamy, że przy dużym kroku siatki ( $h$ ) aproksymuje ono nie tyle równanie (2.49), co równanie różniczkowe następującej postaci:

$$\left( r\Delta + \frac{h}{2} |a| \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{h}{2} |b| \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) \psi + a \frac{\delta \psi}{\delta x} + b \frac{\delta \psi}{\delta y} = c(x, y). \quad (2.69)$$

A zatem w równaniu (2.69) oprócz współczynnika lepkości  $r$  zjawia się dodatkowy współczynnik lepkości związany z numeryczną aproksymacją równania różniczkowego. Ten dodatkowy współczynnik jest głównie wynikiem tego, że poprzednio osiągnęliśmy pierwszy rząd aproksymacji, to znaczy że różnica (2.60) była proporcjonalna do  $h$ . Gdybyśmy zwiększyli rząd aproksymacji, tak aby różnica (2.60) była proporcjonalna do  $h^2$  lub  $h^3$ , efekty „tarcia numerycznego” zostałyby zniwelowane. Przedstawimy teraz numeryczną aproksymację równania (2.49) zaproponowaną przez Iljina (1969), kiedy otrzymuje się drugi rząd aproksymacji. W tym celu zapiszemy nasze równanie (2.56) w postaci:

$$L_1 \psi_h = \gamma_1 \psi_{\bar{x}\bar{x}} + \gamma_2 \psi_{\bar{y}\bar{y}} + a \psi_{\bar{x}} + b \psi_{\bar{y}} = C, \quad (2.70)$$

a więc charakteryzujące się drugim rzędem aproksymacji. Chodzi tylko o sposób wybrania współczynników  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , tak aby zapewnić tę własność.

Zauważmy, że przy stałych  $a$ ,  $b$  i  $r$  równanie (2.49) posiada proste rozwiązanie:

$$\exp\left(-\frac{ax}{r}\right) \exp\left(-\frac{by}{r}\right). \quad (2.71)$$

Przyjmując w tym rozwiązaniu  $x = jh$  oraz  $y = kh$ , a następnie wprowadzając to rozwiązanie do równania (2.70) otrzymujemy:

$$\gamma_1 = \frac{ah}{2} \operatorname{cth} \frac{ah}{2r} \quad (2.72)$$

$$\text{oraz } \gamma_2 = \frac{bh}{2} \operatorname{cth} \frac{bh}{2r}. \quad (2.73)$$

Iljin (1969) wykazał, że tak wybrane współczynniki zapewniają, iż różnica  $|L\psi - L_1\psi_h| \leq R h^2$ .

## 10. NIEKTÓRE REZULTATY POMIARÓW PRĄDÓW W MORZU BAŁTYCKIM

Obliczenia wykonane w poprzednich paragrafach dotyczyły prądów ustalonych. Jest to rodzaj prądów, które mogą interesować każdego; po-



wstają one w wyniku całkowitego rozwoju danej sytuacji hydrometeorologicznej. Niejasną tylko pozostaje kwestia, jak długo należy oczekiwać na ustaloną sytuację? Odpowiedź na to pytanie daje praca Uusitalo (1962) dotycząca Zatoki Botnickiej. Ponieważ Morze Bałtyckie i Zatoka Botnicka są zbliżone wymiarami, możemy przyjąć rezultaty Uusitalo, który stwierdził, że przy wiatrach o prędkości 10 m/sek czas ustalania się prądów wynosi 1—2 dni.

W obecnej sytuacji, kiedy stan techniczny naszego wyposażenia nie pozwala wykonać pomiarów na znacznej przestrzeni obejmującej cały akwen oraz w dużych przedziałach czasowych, obliczenia numeryczne prądów ustalonych dają jedyną możliwość całościowego objęcia zjawiska prądów. Jednak wiatry wiejące nad morzami są czynnikiem zmiennym w czasie oraz niejednorodnym w przestrzeni, podobne własności mają też prądy generowane przez wiatry. Zmienność prądów może być badana tylko za pomocą serii pomiarów dostatecznie długich w czasie, tak, aby można było za pomocą metody analizy widmowej wydzielić różnorodne składowe prądów. W Bałtyku bowiem oprócz prądów związanych z wiatrem bardzo często występują prądy oscylacyjne wywołane falami wewnętrznymi. Przy tym te prądy posiadają długie okresy, a ich wielkości zbliżone są do prądów wiatrowych, tak że przy krótkotrwałych pomiarach w ogóle nie jesteśmy w stanie ich odróżnić. Pomiarów prądów na Bałtyku wykonywane są od dłuższego czasu, niestety w wielu wypadkach były one zbyt krótkotrwałe. Klasyczną już jest seria pomiarowa Gustafsona i Kulenberga (1936), wykazująca istnienie zmian okresowych bliskich do okresu wahadłowego.

W niniejszej dyskusji przedstawione zostaną niektóre pomiary wykonane na Bałtyku podczas międzynarodowej ekspedycji w r. 1964. Nasza dyskusja nie ma na celu przedstawienia wszystkich pomiarów, chcemy raczej zasugerować czytelnikowi pewne podejście do pomiarów poprzez odpowiednie metody analizy. Zaproponować można dwie metody:

- a) zastosowanie widmowej gęstości w przypadku ciągłych pomiarów w czasie,
- b) zastosowanie rozkładów częstości występowania przy nieregularnych pomiarach w czasie lub zbyt krótkich seriach pomiarowych.

W r. 1964 (od 1 do 13 sierpnia) wykonywano pomiary oceanograficzne w kilku wybranych punktach na Bałtyku. Prawie wszystkie państwa bałtyckie brały w nich udział. Była to pierwsza próba mająca na celu otrzymanie dokładnych informacji dotyczących warunków hydrometeorologicznych w całym akwenie. Dane z prądografów zostały przeanalizowane w pracach autora (1966, 1967a, 1967b). Omówimy najpierw dane uzyskane przez radziecki statek badawczy „Okieanograf” na Głębi



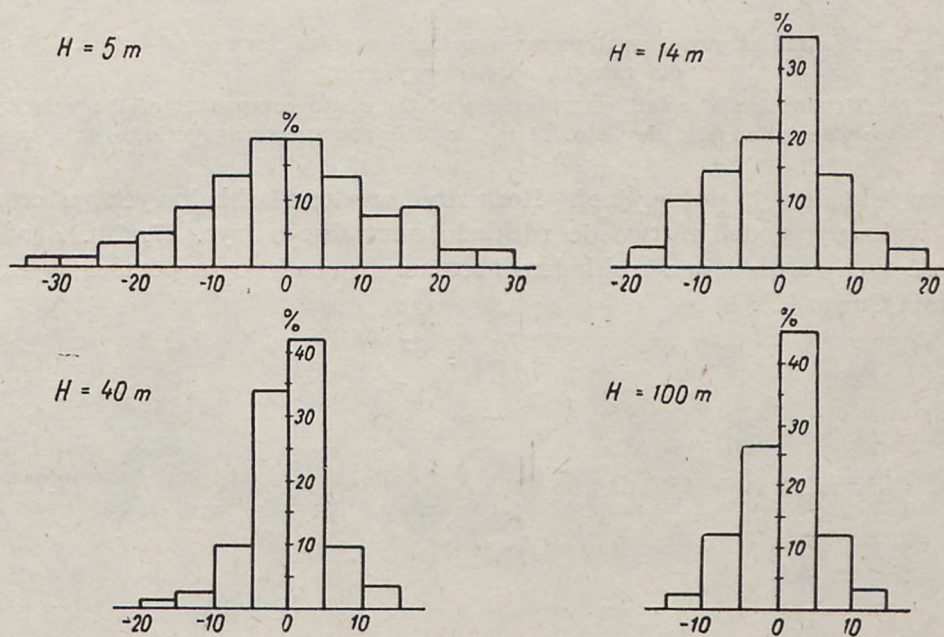
Gotlandzkiej  $\varphi = 57^{\circ} 56' 4''$  N,  $\lambda = 20^{\circ} 20' E$ ). Prądografy BPW — Aleksiejewa były zawieszane na głębokościach 5, 14, 40, 100 oraz 165 m. Rejestracja prądów była dokonywana co 30 min. Na głębokości 165 m prądy nie wykazują żadnych zmian i mają wartość 2—3 cm/sek. Zajmiemy się najpierw określeniem zmienności prądów; w tym celu zgodnie z hipotezą Reynoldsa przedstawimy składowe prędkości w postaci średnich ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ) oraz pulsacji ( $u'$ ,  $v'$ ):

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u', \\ v &= \bar{v} + v', \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\text{gdzie } \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt,$$

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v dt. \quad (2.75)$$

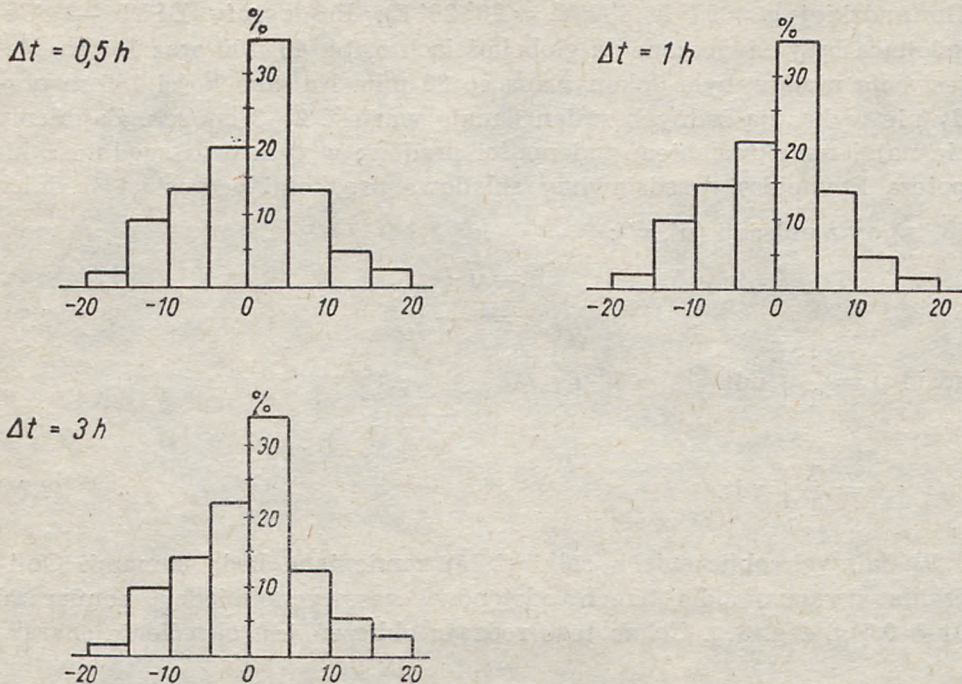
W dalszych obliczeniach całki (2.75) zamieniane będą sumami. Obliczenia wykonano dla trzech odstępów czasowych między pomiarami  $\Delta t = 0,5$  g, 1 g, 3 g. Celem tego rodzaju obliczeń jest określenie charak-



Ryc. 27. Rozkład częstości występowania prędkości pulsacji  $v'$  na różnych głębokościach dla okresu wyśredniania ( $\Delta t$ ) 0,5 godz.

Fig. 27. Distribution of relative frequencies of the north component of the velocity deviation at different depths with an averaging period 0.5 h.





Ryc. 28. Rozkład częstości występowania pulsacji prędkości  $v'$  na głębokości 14 m dla różnych okresów wyśredniania

Fig. 28. Distribution of relative frequencies of the south component of the velocity deviation at a depth of 14 m for different averaging periods

teru składowej pulsacyjnej. Rozkłady częstości składowych  $u'$  oraz  $v'$  wykazują podobieństwo do rozkładu normalnego (ryc. 27, 28). Zgodność tych rozkładów z rozkładem normalnym zbadano za pomocą wyrażenia Cornu (C):

$$C = \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^2 = \frac{\pi}{2}, \quad (2.76)$$

gdzie:

$$\sigma_{v'}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (v - v')^2 dt, \quad (2.77 a)$$

$$\mu_{v'} = \frac{1}{T} \int_0^T |v - v'| dt. \quad (2.77 b)$$

Podobne zależności mogą być zapisane dla składowej  $u'$ . Wykonane obliczenia wskazują, że otrzymane wartości Cornu są bardzo bliskie wielkości teoretycznej  $C = 1.57$ .



Ruch burzliwy, który jest charakteryzowany składowymi pulsacyjnymi, porównamy teraz ze średnim ruchem. W tym celu porównamy  $\sigma_v'$  oraz  $\sigma_u'$  ze średnią wypadkową prędkością:

$$V = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$$

w wyniku czego otrzymujemy wielkość zwaną intensywnością burzliwości:

$$I_u' = \frac{\sigma_u'}{V} \quad I_v' = \frac{\sigma_v'}{V}. \quad (2.78)$$

Wielkości te opisują względną intensywność burzliwości wzdłuż osi (x, y) układu, w ten sposób zaś otrzymujemy kierunki, wzdłuż których burzliwość jest większa lub mniejsza. Obliczenia  $I_u$  oraz  $I_v$  zamieszczone są w tab. 2. Dane te wskazują na niezwykle fakt, mianowicie względną

Tabela 2

Okres uśredniania Averaging time Głębokość m Depth m	$\Delta t = 0,5$		$\Delta t = 1$		$\Delta t = 3$	
	$I_u$	$I_v$	$I_u$	$I_v$	$I_u$	$I_v$
5	1,1	1,0	1,2	1,8	1,1	1,0
14	2,5	2,4	2,2	2,1	2,5	2,4
40	1,8	1,2	1,9	1,3	2,2	1,6
100	1,9	2,6	4,0	5,2	4,5	5,2

intensywność burzliwości nie jest największa przy powierzchni akwenu.

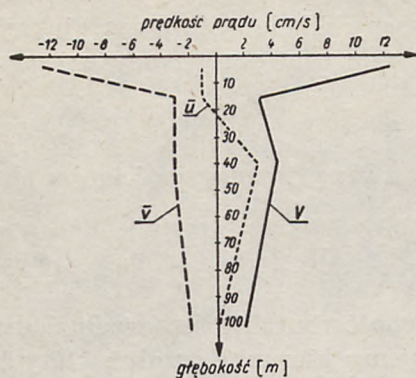
Przebieg średnich składowych  $\bar{u}$  i  $\bar{v}$  z głębokością przedstawia ryc. 29.

Zademonstrujemy z kolei inną metodę analizy na przykładzie tych samych danych. Obliczymy widmową gęstość prędkości prądów na głębokościach 14 m, 40 m oraz 100 m. Wykorzystamy tutaj wyrażenia zamieszczone w podrozdziale: Estymacja niektórych charakterystyk losowych. Uzyskane wyniki zamieszczone zostały na ryc. 30. Obserwujemy na niej charakterystyczne maksimum widmowej gęstości energii kinetycznej zawarte w przedziale 10—30 g. Maksimum z okresem około 14,5 g jest niewątpliwie następstwem występowania drgań z okresem wahadłowym (T). Okres ten jest związany z parametrem Coriolisa następującą zależnością:

$$T = \frac{2\pi}{f} = \frac{2\pi}{2\omega \sin \varphi}. \quad (2.79)$$

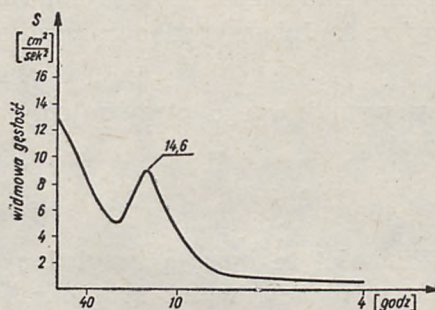
Typowa jest na ryc. 30 wielkość maksimum na poszczególnych głębokościach (14, 40, 100 m). Wskazuje to na przekazywanie energii od po-





Ryc. 29. Średnia prędkość prądu w zależności od głębokości Głębi Gotlandzkiej

Fig. 29. Mean current velocities as a function at the depth in the Gotland Deep

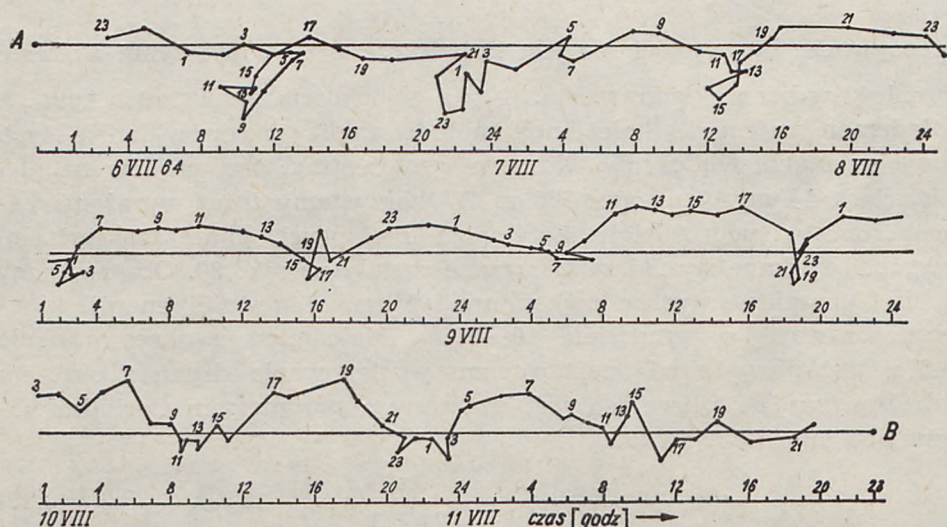


Ryc. 30. Widmowa gęstość prędkości prądu na Głębi Gotlandzkiej

Fig. 30. Power spectrum of current velocity at the Deep of Gotland

wierzchni morza. Ogólnie można wnioskować, że przebieg widmowej gęstości energii przedstawiony na ryc. 30 uwarunkowany jest zmianami okresowymi prądu leżącymi w przedziale czasowym poniżej 30 g oraz zmianami długookresowymi, o których niewiele możemy powiedzieć z powodu słabej selektywności drgań w przedziale powyżej 30 g.

W tym samym czasie, kiedy na Głębi Gotlandzkiej statek „Okieanograf” wykonywał przeanalizowane powyżej pomiary, na Głębi Gdańskiej



Ryc. 31. Prędkość prądu na głębokości 80 m. (6–12 VIII 1964 r., Głębia Gdańska)

Fig. 31. Current velocity at a depth of 80 m (6–12.VIII.1964, Gdańsk Deep)



ekspedycja polska rejestrowała prędkość i kierunek prądu na głębokości 80 m w odstępach 10-minutowych od godz. 23.00 dnia 6 VIII do godz. 22.00 dnia 12 VIII 1964 r. Wyniki pomiarów naniesiono na ryc. 31 w odstępach 1-godzinnych. Krzywa na tej rycinie łączy końce wektorów odpowiadających obserwowanym w określonych momentach czasu prądom. Bieg tej krzywej powtarza się w czasie. Obliczenia widmowej gęstości wykazują, że powtarzalność wywołana jest tutaj obecnością zmian z okresem wahadłowym.

## 11. PLANOWANIE POMIARÓW I EKSPEDYCJI OCEANOGRAFICZNYCH W CELU BADANIA PRĄDÓW MORSKICH

Metody obserwacji parametrów dynamiki morza polegają obecnie na jednoczesnych pomiarach przez statki badawcze lub pławy kotwiczne. Przy tego rodzaju przedsięwzięciach powstaje oczywiste pytanie: jakie powinny być optymalne założenia dla częstości (ilości) obserwacji w czasie i przestrzeni. Rozpatrując ciągi danych obserwacyjnych z punktu widzenia stochastyki można nakreślić pewne rozwiązanie, które wydaje się dalekie od uwzględnienia wszystkich potrzeb. Przy obserwacjach dyskretnych wykonanych z krokiem czasowym  $\Delta t$  warunki optymalności tego kroku winny przede wszystkim wypływać z największej częstości drgań w widmie badanego procesu. W teorii łączności (radiowej) znane jest twierdzenie Kotielnikowa, które pozwala ocenić optymalny

krok czasowy według górnej częstości widma  $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ ;

$$\Delta t = \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m}. \quad (2.80)$$

Przy tym to twierdzenie zostało ustanowione dla widma prążkowego, dla widma ciągłego zaś jest ono przybliżone. W pomiarach dynamiki morza przy poszukiwaniu widmowej gęstości zjawiska posiadającego okres powtarzalności  $T_0$  można zaproponować następującą zależność.

$$4 \Delta t < T_0 < \frac{N \Delta t}{10}; \quad (2.81)$$

gdzie:  $N$  — liczba obserwacji.

Z powyższego wyrażenia widzimy, że lewa strona nierówności, ograniczająca z dołu, jest zbliżona do warunku Kotielnikowa, ale prawa strona jest tak samo oczywista, gdyż wypływa z warunków dokładnego określenia widmowej gęstości omawianych w podrozdziale: Estymacja niektórych charakterystyk losowych. Przy tym nietrudno widzieć, że

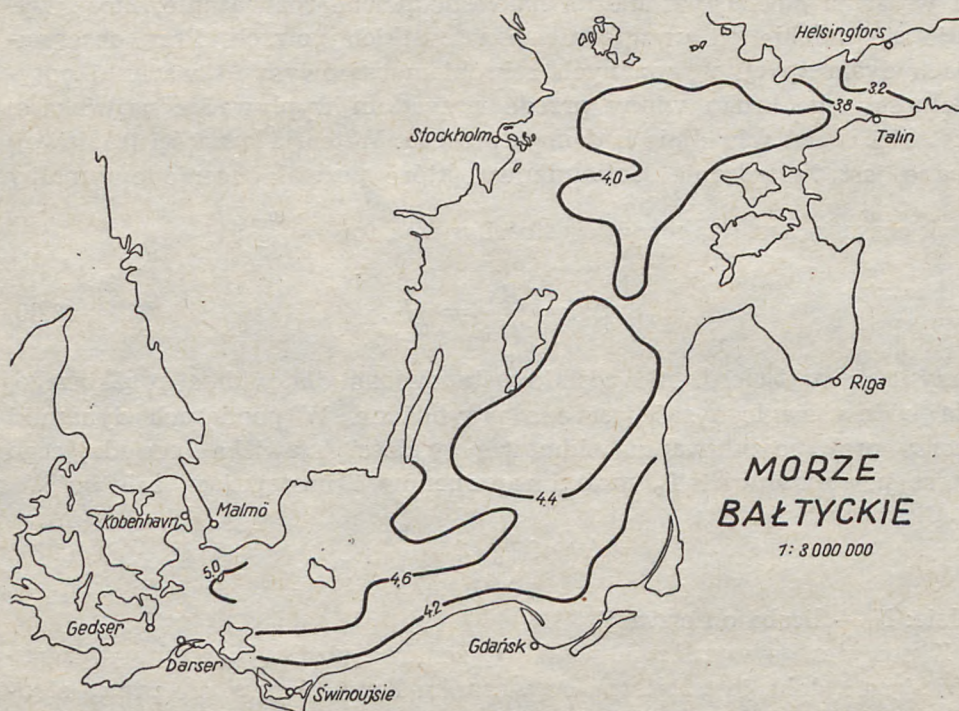


dokładność określenia widmowej gęstości wynosi tutaj 20—25%. Dodajmy też, że zazwyczaj jesteśmy zainteresowani nie jednym okresem  $T_0$ , ponieważ w widmie badanego zjawiska występuje kilka okresów  $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$ ; dla tego przypadku nierówność (2.81) przepiszemy w postaci:

$$4 \Delta t \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n < \frac{N \Delta t}{10}. \quad (2.82)$$

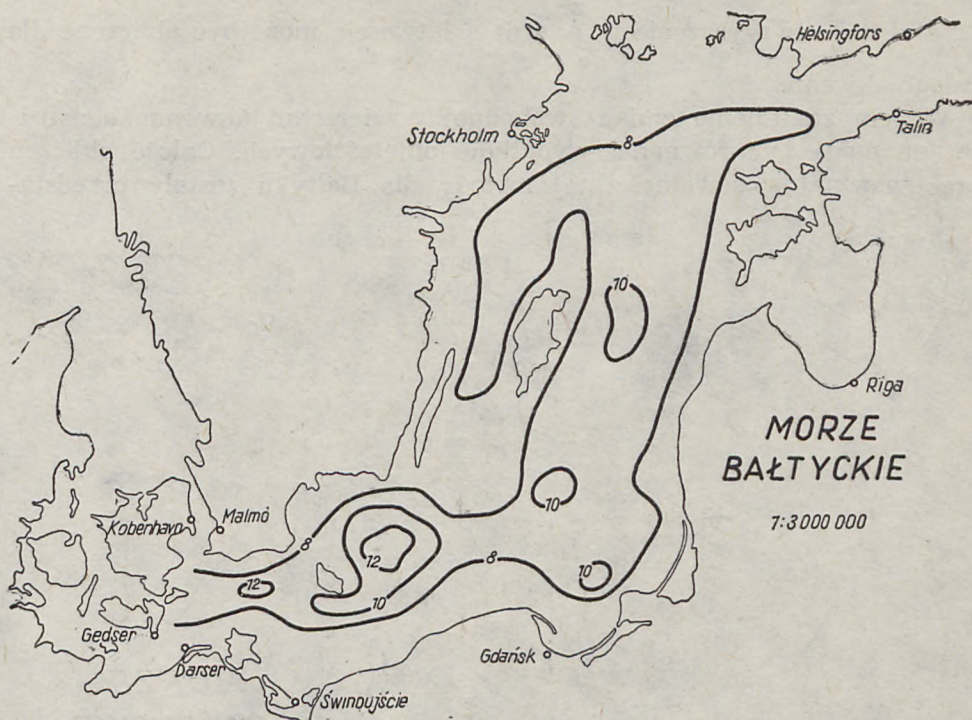
## 12. PRĄDY GĘSTOŚCIOWE W BAŁTYKU

Prądy w morzach wykazujących stratyfikację gęstościową przez wiele lat były obliczane za pomocą tzw. metody dynamicznej zaproponowanej przez Helland-Hansena oraz Sandsträma. W ostatnich latach rozwinęły się metody obliczania prądów na podstawie znanej z pomiarów gęstości z zastosowaniem równań hydrodynamiki; kierunek ten reprezentuje przede wszystkim prof. Sarkisjan w ZSRR (1966).



Ryc. 32. Rozkład gęstości ( $\sigma_t$ ) na powierzchni w miesiącu sierpniu  
Fig. 32.  $\sigma_t$  — distribution at the surface in August



Ryc. 33. Rozkład gęstości ( $\sigma_t$ ) przy dnie w miesiącu sierpniuFig. 33.  $\sigma_t$  — distribution at the bottom in August

Ogólnie rzecz biorąc, jeśli mamy równanie przepływów geostroficznych w postaci:

$$fv = \frac{\delta p}{\delta x}, \quad (2.83a)$$

$$fu = -\frac{\delta p}{\delta y} \quad (2.83b)$$

oraz równanie hydrostatyki:

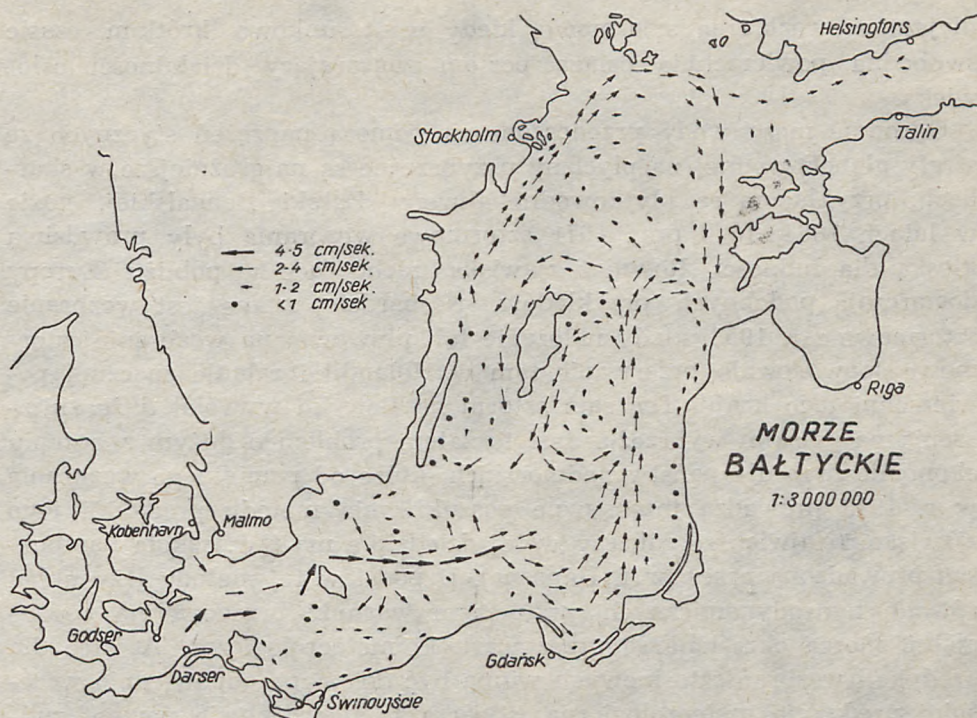
$$p = \int_{+\xi}^z \rho g dz = -\rho_0 g \xi + g \int_0^z \rho dz, \quad (2.84)$$

gdzie gęstość  $\rho$  jest funkcją głębokości, to prądy są superpozycją dwóch składowych: a) wywołanych nachyleniem swobodnej powierzchni morza i b) wywołanych niejednorodnym rozkładem gęstości. Przy czym — ponieważ zakładamy, że gęstość jest znana z pomiarów (np. zasolenia i tem-









Ryc. 35. Prądy gęstościowe przy dnie  
Fig. 35. Density currents at the bottom

kulację gęstościową. Ogólnie jednak mówiąc są to prądy nieznaczne, rzędu 2—3 cm/sek, powodujące wymianę termohalinową wód Bałtyku za okres około 1 roku.

### III. METODY PREDYKCJI WAHAŃ POZIOMÓW MORZA

#### 1. CHARAKTERYSTYKA ZMIAN POZIOMÓW

Obserwując zmiany powierzchni swobodnej akwenu za pomocą mareografu przez dostatecznie długi okres czasu stwierdzamy istnienie wahań okresowych wywołanych pływami lub też po przejściu sztormów akwen wykazuje okresowe drgania tzw. sejsze; okres tych zmian uzależniony jest od morfologii basenu. Jednak dla strefy brzegowej, gdzie znajdują się inżynierskie budowle posadowione przez człowieka, najgroź-



niejsze są wezbrania sztormowe, kiedy w stosunkowo krótkim czasie swobodna powierzchnia osiąga poziom zagrażający działalności człowieka.

Ogromne masy wody przenoszone za pomocą naprężeń stycznych ze strefy głębokowodnej na płycizny przybrzeżne są najgroźniejsze w skutkach; przykładem są płytkowodne akweny Zatoki Bengalskiej, gdzie w latach 1864, 1876 oraz 1971 sztormowe wezbrania były prawdziwą klęską dla ludności. Również zjawiska zachodzące w pobliżu Europy dostarczają podobnych przykładów. Najbardziej znane jest wezbranie sztormowe z r. 1953, kiedy nałożenie fali pływowej na wezbranie sztormowe spowodowało przerwanie tam w Holandii i zalanie znacznej powierzchni tego kraju. Ten sam sztorm na Bałtyku wywołał duże zniszczenia na polskim wybrzeżu. Jest to zatem problem o dużym znaczeniu ekonomicznym dla państw nadmorskich, które od pamiętnego wezbrania w r. 1953 prowadzą intensywne poszukiwania metody predykcji tego zjawiska. (Największe sukcesy w tej dziedzinie ma tzw. szkoła hamburska prowadzona przez prof. Hansena). U podstaw tej metody leży układ równań hydrodynamicznych, przy czym warunki brzegowe na powierzchni morza określone są przez warunki meteorologiczne. A więc dla predykcji wezbrań sztormowych winna być dokonana odpowiednio wcześniej predykcja meteorologiczna, stwarza to niewątpliwie pewne trudności w zastosowaniu metod prognozowania.

W obecnym opracowaniu przedstawimy metodą hydrodynamiczną prognozowania wezbrań sztormowych w konkretnych akwenach morskich, kiedy jedyną dostępną metodą rozwiązania jest numeryczne całkowanie układu równań różnicowych.

## 2. ZASADNICZE RÓWNANIA

Badanie zmian poziomu morza  $\xi(x, y, t)$  w zależności od kierunku i prędkości wiatru prowadzić będziemy za pomocą równań wyprowadzonych w pierwszej partii artykułu: Podstawowe równania predykcji prądów oraz wezbrań sztormowych:

$$\frac{\delta Q_x}{\delta t} - f Q_y = g \frac{\delta \xi}{\delta x} H + (\tau_{x, \xi} - \tau_{x B}) \frac{1}{\rho}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\delta Q_y}{\delta t} + f Q_x = g \frac{\delta \xi}{\delta y} H + (\tau_{y, \xi} - \tau_{y B}) \frac{1}{\rho}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y}. \quad (3.3)$$



W równaniach tych dodatkowo pominięliśmy wyrażenia nieliniowe  $\xi g \frac{\delta \xi}{\delta x}$  oraz  $\xi g \frac{\delta \xi}{\delta y}$ , które odgrywają pewną rolę na płycznach, kiedy głębokość  $H$  jest tego samego rzędu co  $\xi$ . Oczywiście gdybyśmy rozważali zjawiska w tak płytkich basenach, wyrażenia nieliniowe wprowadzimy znów do równań ruchu. Jednoznaczne rozwiązanie układu równań (3.1, 3.2, 3.3) otrzymamy przez uwzględnienie odpowiednich warunków początkowych i brzegowych.

Oczywiste jest, że zamiast analizowania układu równań możemy wyprowadzić jedno równanie różniczkowe wyższego stopnia dla jednej zmiennej zależnej  $\xi$  albo  $Q_x$ , albo  $Q_y$ . Wyprowadzimy równanie zmian swobodnej powierzchni morza, w tym celu podstawimy  $Q_x$  oraz  $Q_y$  z równań (3.1) oraz (3.2) do równania (3.3):

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^3 \xi}{\delta t^3} + f^2 \frac{\delta \xi}{\delta t} + fg \left( \frac{\delta \xi \delta H}{\delta x \delta y} - \frac{\delta \xi \delta H}{\delta y \delta x} \right) - \\ & - g \left[ \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta^2 \xi}{\delta x \delta t} H \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( \frac{\delta^2 \xi}{\delta y \delta t} H \right) \right] = \\ & = f \left( \frac{\delta \tau_y}{\delta x} - \frac{\delta \tau_x}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta \tau_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_y}{\delta y} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\tau_x = \tau_{\xi, x} - \tau_{B, x}$$

oraz

$$\tau_y = \tau_{\xi, y} - \tau_{B, y}$$

Przejdźmy teraz do omówienia warunków początkowych i brzegowych. Wprawdzie możemy przyjąć dowolne warunki początkowe dla poziomu morza i dla wydatków masowych, jednak niemożliwe jest posiadanie rozeznania odnośnie do tych wielkości w całym badanym basenie. Wybiera się zazwyczaj takie sytuacje, kiedy występowała cisza i wtedy wiadomo na pewno, że w całym basenie  $Q_x = Q_y = \xi = 0$ . Warunek brzegowy dla wydatków objętościowych jest oczywisty, gdyż składowa prostopadła wydatku do brzegu winna zanikać na brzegu, czyli:

$$Q_n = 0, \quad (3.5)$$

gdzie  $n$  — kierunek prostopadły do brzegu.

### 3. TARCIE PRZY POWIERZCHNI I DNIE

Równania ruchu zawierają wyrażenia sił zewnętrznych, które charakteryzują naprężenia styczne wiatru. Ruch wywołany tą siłą jest ha-



mowany przez siłę tarcia przy dnie. Wprawdzie teoretycznie obie te siły wyrażają się podobnie  $\rho k \frac{dv}{dz}$ , a więc są zależne od współczynnika lepkości burzliwej i pochodnej prędkości, to jednak ich wyrażenia empiryczne różnią się znacznie.

Siły naprężeń stycznych wiatru wyrażają się w funkcji prędkości wiatru oraz własności aerodynamicznych sfalowanych powierzchni morza:

$$\tau_s = \rho_a C_z U_z^2, \quad (3.6)$$

gdzie:  $\rho_a$  — gęstość powietrza,  $C_z$  — współczynnik oporu aerodynamicznego na wysokości  $z$  nad powierzchnią morza,  $U_z$  — prędkość wiatru na wysokości  $z$  nad powierzchnią morza.

Określenie współczynnika oporu aerodynamicznego stanowi jeden z najpoważniejszych problemów hydrodynamiki morza. Rezultaty wieloletnich badań wykonanych na różnych morzach i oceanach zostały zebrane przez Wilsona. Wykazują one znaczny rozrzut oraz wyraźną zależność  $C_z$  od prędkości wiatru. Zazwyczaj pomiary anemometryczne są wykonywane na wysokości  $z = 10$  m, stąd też w dalszym ciągu będziemy mówić o  $C_{10}$  oraz  $U_{10}$ . Generalnie Wilson wskazuje, że  $C_{10}$  dla wiatrów słabych (ok. 2—8 m/sek) posiada wartość  $1,1 \cdot 10^{-3}$ , dla wiatrów silnych zaś (ok. 20 m/sek) ta wartość wynosi około  $2,6 \cdot 10^{-3}$ .

Wykorzystując analizę Wilsona oraz nowsze badania zależność  $C_{10}$  od prędkości możemy przedstawić w postaci liniowej, jak na ryc. 36.

Siły naprężeń stycznych przy dnie określane są w sposób empiryczny za pomocą dwóch różnych wyrażen, kiedy zakłada się proporcjonalność do wydatków lub kwadratu wydatku. Jeśli naprężenie styczne jest proporcjonalne do kwadratu wydatku, to wtedy oddziałuje ono bardzo silnie na charakterystyki ruchu, równania ruchu bowiem stają się nieliniowe. Współczynnik proporcjonalności zależy tutaj od głębokości, charakteru dna (szorstkości materiału dennego); dla naprężenia stycznego przy dnie wzdłuż osi  $x$  zapiszemy:

$$\tau_{B,x} = \rho g c^{-2} Q_x \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}, \quad (3.7a)$$

podobnie wzdłuż osi  $y$ :

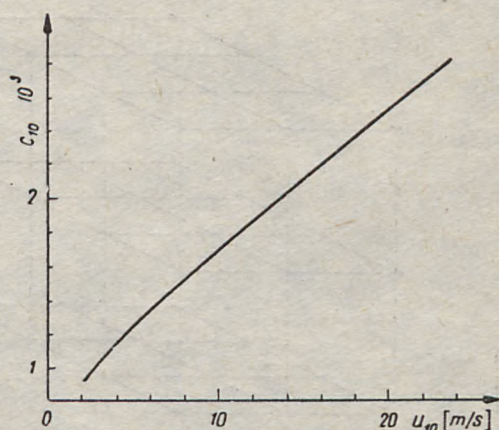
$$\tau_{B,y} = \rho g c^{-2} Q_y \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}. \quad (3.7b)$$

Stała  $C$  w powyższych wzorach wyraża tzw. współczynnik Chezy. Wyrażenia (3.7a) i (3.7b) często przepisywane są jako:



Ryc. 36. Zależność współczynnika oporu aerodynamicznego od prędkości wiatru na wysokości 10 m nad powierzchnią morza

Fig. 36. Dependence of the wind drag coefficient on wind at 10 m above the sea



$$\tau_{B,x} = \frac{R}{H^2} Q_x \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}, \quad (3.8a)$$

$$\tau_{B,y} = \frac{R}{H^2} Q_y \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}, \quad (3.8b)$$

gdzie  $R = 3 \cdot 10^{-3}$

Przyjmując z kolei, że naprężenie jest liniowo zależne od wydatku:

$$\tau_x = rQ_x; \quad \tau_y = rQ_y, \quad (3.9)$$

określimy współczynnik proporcjonalności  $r$  jako:

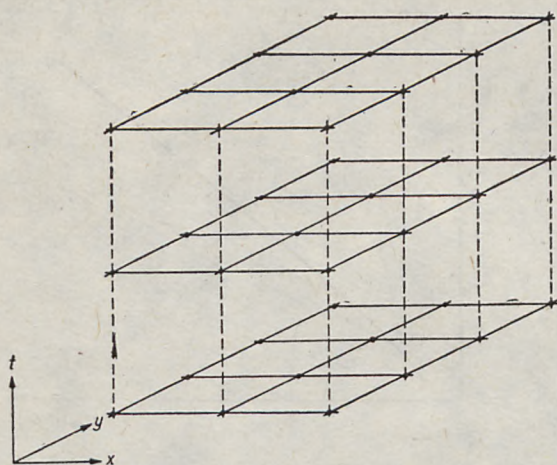
$$r = \frac{k\pi}{4H^2}, \quad (3.10)$$

gdzie  $k$  — współczynnik lepkości burzliwej przy dnie.

#### 4. POSTAĆ RÓŻNICOWA RÓWNAŃ

Rozwiązanie układu równań (3.1—3.3) z warunkiem brzegowym (3.5) dla konkretnych warunków anemometrycznych oraz przy skomplikowanej linii brzegowej, jaka występuje w morzach i oceanach, otrzymać możemy tylko metodami numerycznymi. Stosując metodę numerycznego całkowania zamienimy powyższe równania różniczkowe na równania różnicowe. Wprowadzając odpowiednie siatki czasowo-przestrzenne z krokiem  $\Delta t$  wzdłuż osi czasu oraz  $\Delta h$  wzdłuż osi  $x$  i  $y$ , otrzymamy zamiast wielkości ciągłych wartości dyskretne odniesione do węzłów siatki jak na ryc. 37.





Ryc. 37. Przestrzenna siatka obliczeń numerycznych

Fig. 37. Space grid for numerical calculations

Przyjmijmy też, że dyskretna współrzędna wzdłuż osi  $x$  zmienia się w postaci  $x_j = j\Delta h$ , gdzie  $j$  — liczba całkowita — zmienia się od 0 do  $J$ . Podobnie wzdłuż osi  $y$ ,  $y_k = k\Delta h$ , zaś  $0 \leq k \leq K$ , oraz wzdłuż osi  $t$ ,  $t_l = l\Delta t$ , gdzie  $0 \leq l \leq L$ . Oczywiście jest, że w miarę zmniejszania się kroku siatki, rozwiązanie numeryczne będzie coraz bliższe do rozwiązania analitycznego. Zajmiemy się teraz dokładniej badaniem stopnia aproksymacji rozwiązania analitycznego przez równanie numeryczne.

Przyjmijmy zatem, że znane jest rozwiązanie analityczne rozpatrywanego układu równań. Niechaj zmiany poziomu morza  $\xi(x, y, z, t)$  będą funkcją ciągłą swych argumentów. Załóżmy też, że znamy rozwiązanie zagadnienia numerycznego w postaci funkcji  $\xi_{j,k}^l$ ,  $k$  dyskretnych argumentów, czyli znane są wartości funkcji  $\xi$  tylko w węzłach siatki. Aby porównać te dwa rozwiązania, rozwiązanie analityczne  $\xi(x, y, z, t)$  również będziemy rozpatrywać tylko w węzłach siatki i oznaczymy wartość tej funkcji w punkcie  $j, k, l$  przez  $\xi(j, k, l)$ .

Wartość absolutna różnicy —  $\xi(j, k, l) - \xi_{j,k}^l$  — będzie miarą aproksymacji rozwiązania analitycznego przez rozwiązanie numeryczne. Dla ogólnej charakterystyki różnicy wprowadzimy normę. W naszym przypadku za normę (oznaczać ją będziemy znakiem  $\|\cdot\|$ ) przyjmijmy wartość maksymalną absolutnej różnicy wybranej na podstawie wszystkich węzłów siatki, czyli:

$$\|\xi\| = \max |\xi(j, k, l) - \xi_{j,k}^l|. \quad (3.11)$$

Przy czym indeksy zmieniają się w przedziałach:

$$0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq l \leq L.$$



Przechodząc z kolei do analizy aproksymacji równań różniczkowych równaniami różnicowymi wykorzystamy wprowadzone powyżej pojęcie normy. Dla ułatwienia dalszego zapisu zamiast pisania symboli różniczkowania wprowadzimy operator różniczkowy  $A$ , dzięki temu równanie (3.4) przepiszemy w postaci:

$$A \xi = F, \quad (3.12)$$

gdzie  $F$  wyraża siły naprężeń stycznych.

Równanie różniczkowe (3.12) w dowolnym węźle siatki  $j, k, l$  przedstawimy jako:

$$A \xi(j, k, l) = F(j, k, l), \quad (3.13)$$

równanie zaś różnicowe odpowiadające równaniu (3.12) będzie:

$$A_{j,k}^l \xi_{j,k}^l = F(j, k, l). \quad (3.14)$$

Wyrażenie (3.13) oznacza, że operator równania różniczkowego działa na ciągłą funkcję  $\xi(x, y, t)$  tylko w węzłach siatki. W wyrażeniu zaś (3.14) mamy już do czynienia z operatorem różnicowym  $A_{j,k}^l$  oraz z funkcją  $\xi_{j,k}^l$  znaną tylko w węzłach siatki. Uczynimy teraz dalszy krok, podobnie jak powyżej dla funkcji; wprowadzimy normę charakteryzującą stopień przybliżenia równania różnicowego do różniczkowego:

$$\|A\xi\| = \text{Max} |A\xi(j, k, l) - A_{j,k}^l \xi_{j,k}^l| \quad (3.15)$$

$$0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq l \leq L.$$

Rozpatrzmy dokładniej pojęcie aproksymacji równań różniczkowych równaniami różnicowymi.

W tym celu zamiast układu równań (3.1, 3.2, 3.3) przeanalizujemy układ uproszczony bez naprężeń stycznych ( $\tau = 0$ ), siły Coriolisa ( $f = 0$ ) oraz ze stałą głębokością akwenu ( $H = \text{Const.}$ );

$$\frac{\delta Q_x}{\delta t} = gH \frac{\delta \xi}{\delta x}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\delta Q_y}{\delta t} = gH \frac{\delta \xi}{\delta y}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta \xi_y}{\delta y}. \quad (3.18)$$

Dla przedstawienia numerycznego różniczek występujących w powyższych równaniach posłużymy się szeregiem Taylora. Funkcja w dowolnym węźle  $j, k, l+1$  będzie zatem:



$$\xi_{j,k}^{l+1} = \xi_{j,k}^l + \frac{\delta\xi}{\delta t} \Delta t + \frac{\delta^2\xi}{\delta t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2} + 0 (\Delta t^3), \quad (3.19)$$

gdzie wyrażenie  $0 (\Delta t)$  oznacza rząd wielkości względem parametru umieszczonego w nawiasach. Korzystając z (3.18) pierwsza pochodna względem czasu zostanie zapisana jako:

$$\frac{\delta\xi}{\delta t} = \frac{\xi_{j,k}^{l+1} - \xi_{j,k}^l}{\Delta t} + 0 (\Delta t). \quad (3.20)$$

Widzimy więc, że w miarę zmniejszania kroku  $\Delta t$  wyrażenie różnicowe przybliży się do pochodnej cząstkowej, a  $0 (\Delta t) \rightarrow 0$ . W podobny sposób mogą być zapisane pochodne względem  $x$  oraz  $y$ , a układ równań (3.16, 3.17, 3.18) w postaci różnicowej:

$$\frac{Q_{x,j,k}^{l+1} - Q_{x,j,k}^l}{\Delta t} + 0 (\Delta t) = gH \frac{\xi_{j+1,k}^l - \xi_{j,k}^l}{\Delta h} + 0 (\Delta h), \quad (3.21)$$

$$\frac{Q_{y,j,k}^{l+1} - Q_{y,j,k}^l}{\Delta t} + 0 (\Delta t) = gH \frac{\xi_{j,k+1}^l - \xi_{j,k}^l}{\Delta h} + 0 (\Delta h), \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{x,j+1,k}^l - Q_{x,j,k}^l}{\Delta h} + \frac{Q_{y,j,k+1}^l - Q_{y,j,k}^l}{\Delta h} + 0 (\Delta h) = \\ = \frac{\xi_{j,k}^{l+1} - \xi_{j,k}^l}{\Delta t} + 0 (\Delta t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Analizując otrzymany układ równań stwierdzamy, że rząd aproksymacji względem czasu i przestrzeni jest ten sam i wynosi  $0 (\Delta h)$  oraz  $0 (\Delta t)$ . Najlepsze przybliżenie otrzymamy, kiedy wykładnik potęgi w wyrażeniu  $0 (\Delta h^n)$  będzie jak największy. W dalszym ciągu w zależności od  $n$  będziemy mówili o  $n$ -tym rzędzie aproksymacji. Tak więc układ powyższy posiada pierwszy rząd aproksymacji. Pokażemy teraz sposób otrzymania drugiego rzędu aproksymacji. W tym celu analogicznie do (3.19) zapiszemy wartość funkcji  $\xi$  w węźle  $j, k, l-1$  w postaci szeregu Taylora:

$$\xi_{j,k}^{l-1} = \xi_{j,k}^l - \frac{\delta\xi}{\delta t} \Delta t + \frac{\delta^2\xi}{\delta t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2} + 0 (\Delta t)^3 \quad (3.24)$$

Odejmując wyrażenie (3.24) od (3.19) uzyskamy:

$$\xi_{j,k}^{l+1} - \xi_{j,k}^{l-1} = 2 \frac{\delta\xi}{\delta t} \Delta t + 0 (\Delta t)^3 \quad (3.25)$$

lub dzieląc obustronnie przez  $2\Delta t$ :

$$\frac{\delta\xi}{\delta t} = \frac{\xi_{j,k}^{l+1} - \xi_{j,k}^{l-1}}{2 \Delta t} + 0 (\Delta t)^2. \quad (3.26)$$



Jest to tzw. symetryczna pochodna względem węzła  $j, k, l$ ; uzyskaliśmy tutaj drugi rząd aproksymacji względem  $\Delta t$ . Podobnie mogą być zapisane pochodne względem  $x$  oraz  $y$  i w rezultacie cały układ równań będzie posiadał drugi rząd aproksymacji.

## 5. STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ NUMERYCZNYCH

Niestety, dla procesów hydrodynamicznych zależnych od czasu zapewnienie dostatecznego przybliżenia równań różnicowych i różniczkowych za pomocą odpowiedniego zapisu wyrażeń różnicowych nie zapewnia jeszcze rozwiązania równania różnicowego dostatecznie bliskiego rozwiązaniu analitycznemu. Powstaje problem, czy nieznacznym błęd w obliczeniu, który powstanie na dowolnym kroku czasowym, będzie w następnych chwilach czasowych wzmacniany (niestabilny układ równań różnicowych), czy też będzie zanikał (stabilny układ równań różnicowych).

Stabilność równań liniowych badać można za pomocą metody analizy harmoniczej. Przedstawimy niewielkie odchylenia  $d\xi$  występujące we wszystkich węzłach siatki w postaci:

$$d\xi = d\xi_0 e^{i\sigma_j x} e^{i\sigma_j y} \dots e^{i\sigma_j x_j} e^{i\omega t}. \quad (3.27)$$

W równaniach liniowych obowiązuje zasada superpozycji i dlatego wystarczające będzie, jeśli rozpatrzemy tylko jedną składową odnoszącą się do węzła  $j$ , czyli:

$$d\xi = d\xi_0 e^{i\sigma_j x_j} e^{i\omega t}, \quad (3.28)$$

dalej — ponieważ  $x_j = j\Delta h$  a,  $t = l\Delta t$  — przepisujemy (3.28) w postaci:

$$d\xi = \lambda^l e^{i\alpha}, \quad (3.28a)$$

gdzie:  $\lambda = \sqrt[l]{d\xi_0} e^{i\omega t}$

$$\alpha = \sigma_j \Delta h.$$

Jeśli w dowolnej chwili czasowej  $|\lambda| \leq 1$ , to jest oczywiste, że jest to stabilny układ numeryczny. Zastosujemy powyższe wyrażenie do badania stabilności równania zmian powierzchni swobodnej akwenu w jednomiarowym basenie morskim.

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} - gH \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} = 0. \quad (3.29)$$

Wprowadzając postać numeryczną:

$$\frac{\xi_j^{l+1} + \xi_j^{l-1} - 2\xi_j^l}{(\Delta t)^2} = gH \frac{\xi_{j+1}^l + \xi_{j-1}^l - 2\xi_j^l}{(\Delta h)^2} \quad (3.29a)$$



oraz podstawiając w powyższe równanie wyrażenie (3.28a) otrzymamy:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = -\frac{gH(\Delta t)^2}{(\Delta h)^2} 4 \sin^2 \alpha \quad (3.30)$$

lub przepisując  $\lambda^2 + \lambda(s^2 - 2) + 1 = 0$ , (3.31)

gdzie jako  $s^2$  oznaczono prawą stronę równania (3.30).

Obliczając  $\lambda$  otrzymujemy:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-s^2 + 2 \pm \sqrt{(2 - s^2)^2 - 4}}{2}, \quad (3.32)$$

tylko kiedy  $s^2 \rightarrow 0$  wartość  $\lambda_{1,2} \rightarrow 1$ , a więc jest to przypadek stabilności.

Wskazemy teraz pewne pociągnięcie zapewniające stabilność w wielu układach. Otóż w wyrażeniu (3.29a) pochodna względem  $x$  zapisana została w chwili  $l$ , — jest to tzw. postać jawna pochodnej. Gdybyśmy tę pochodną zapisali w chwili  $l+1$ , czyli w postaci niejawnej, wtedy mamy:

$$\frac{\xi_j^{l+1} + \xi_j^{l-1} - 2\xi_j^l}{(\Delta t)^2} = \frac{gH}{(\Delta h)^2} (\xi_{j+1}^{l+1} + \xi_{j-1}^{l+1} - 2\xi_j^{l+1}). \quad (3.33)$$

Równanie zaś dla  $\lambda$  przyjmuje postać:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = -\lambda s^2, \quad (3.34)$$

skąd:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm is}{1 + s^2}, \quad (3.35)$$

czyli bezwzględna wartość  $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ .

A zatem tak wybrane równanie różnicowe zawsze wykazuje stabilność. Taki charakter równań różnicowych jest często związany z zastosowaniem niejawnej postaci pochodnej względem współrzędnej  $x$ .

Często spotykane jest w zastosowaniach równanie dyfuzji:

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = K \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2}. \quad (3.36)$$

Wyberzemy dla niego postać numeryczną w postaci:

$$\frac{\xi_j^{l+1} - \xi_j^l}{\Delta t} = K \frac{\xi_{j+1}^l + \xi_{j-1}^l - 2\xi_j^l}{(\Delta h)^2}, \quad (3.37)$$

skąd: 
$$\lambda = 1 - \frac{K\Delta t}{(\Delta h)^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (3.38)$$

Ponieważ dla stabilności  $|\lambda| \leq 1$  otrzymamy:



$$\frac{K\Delta t}{(\Delta h)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.39)$$

zatem dla spełnienia warunków stabilności kroki siatki obliczeń numerycznych w czasie i przestrzeni nie mogą być wybrane w sposób dowolny, muszą one spełniać nierówność (3.39).

Postępując jak poprzednio i wprowadzając pochodną względem  $x$  w chwili czasowej  $l+1$ , otrzymamy dla  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4k\Delta t}{(\Delta h)^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.40)$$

a więc znów obserwujemy stabilność bez żadnych dodatkowych warunków.

## 6. STABILNOŚĆ UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

Przytoczone powyżej proste przykłady analizy stabilności dotyczyły pojedynczego równania różnicowego; przejdziemy z kolei do układu równań różnicowych. W tym celu wykorzystamy prace teoretyczne Laxa i Richtmayera oraz innych. Podobnie, jak powyżej celem tych badań będzie stwierdzenie faktu czy zaburzenie wprowadzone w dowolnej chwili czasowej w układ równań zostaje wzmocnione, czy też zanika z czasem; ponieważ jednak występuje tutaj kilka niewiadomych, aby uprościć nieco dalsze rozważania, wprowadzimy zapis macierzowy, tak więc na przykład układ równań:

$$\frac{\delta Q_x}{\delta t} = gH \frac{\delta \xi}{\delta x} \quad (3.41)$$

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \frac{\delta Q_x}{\delta x} \quad (3.42)$$

charakteryzujący jednowymiarowe przepływy (wzdłuż osi  $x$ ) bez sił tarcia, w zapisie macierzowym przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta t} & -gH \frac{\delta}{\delta x} \\ -\frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

lub też jeszcze prościej, oznaczając jako  $[A]$  — macierz operatorów, a,  $[Q]$  — macierz zmiennych zależnych, zapiszemy:



$$[A] [Q] = [0]. \quad (3.43a)$$

Numeryczne rozwiązanie układu równań (3.43) poprowadzimy za pomocą następującego schematu:

$$\frac{Q_{x,j}^{1+1} - Q_{x,j}^1}{\Delta t} = gH \frac{\xi_{j+1}^1 - \xi_{j-1}^1}{2 \Delta h}, \quad (3.44)$$

$$\frac{\xi_j^{1+1} - \xi_j^1}{\Delta t} = \frac{Q_{x,j+1}^1 - Q_{x,j-1}^1}{2 \Delta h}. \quad (3.45)$$

Podobnie jak poprzednio ze względu na liniowość równań przyjmiemy, że zmiany parametrów są złożone ze zmian zależnych od czasu i przestrzeni, czyli:

$$\xi = \xi^1 e^{ij \Delta h} \quad (3.46)$$

oraz

$$Q_x = Q_x^1 e^{ij \Delta h} \quad (3.47)$$

podstawiając do (3.44) i (3.45) otrzymamy:

$$Q_x^{1+1} - Q_x^1 = \frac{gH\Delta t}{\Delta h} \frac{\xi^1 (e^{i\Delta h} - e^{-i\Delta h})}{2}, \quad (3.44a)$$

$$\xi^{1+1} - \xi^1 = \frac{\Delta t}{\Delta h} Q_x^1 \left( \frac{e^{i\Delta h} - e^{-j\Delta h}}{2} \right). \quad (3.45a)$$

Grupując wielkości zależne od chwili czasowej  $l+1$  oraz  $l$ , w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x^{1+1} \\ \xi^{1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & , i \frac{gh\Delta t}{\Delta h} \sin \Delta h \\ i \frac{\Delta t}{\Delta h} \sin \Delta h, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x^1 \\ \xi^1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

lub jako:

$$[A] [Q^{1+1}] = [B] [Q^1], \quad (3.48a)$$

a następnie przekształcając z łatwością wyprowadzimy znaczenie  $[Q^{1+1}]$  w dowolnej chwili czasowej:

$$[Q^{1+1}] = [A]^{-1} [B] [Q^1] = [G] [Q^1]. \quad (3.49)$$

Zakładając, że wartość  $[Q]$  jest znana w momencie  $l=0$ , to wartość  $[Q]$  w dowolnej chwili  $t=n l$  wynosi:

$$[Q^{nl}] = [G^n] [Q^{l=0}]. \quad (3.50)$$

Z przytoczonych powyżej rozważań oczywiste jest, że stabilność układu zależy od macierzy  $[G]$ , zwanej też macierzą przejścia, od chwili czaso-



wej 1 do 1 + 1. Jak wykazał von Neuman, warunek stabilności jest spełniony, kiedy największa wartość własna macierzy [G]

$$|\lambda_{\text{Max}}| \leq 1. \quad (3.51)$$

Jest oczywiste, że wartość własna w obecnych rozważaniach spełnia tę samą rolę, co poprzednio parametr  $e^{i\lambda\Delta t}$ .

Pokażemy teraz sposób wyznaczania wartości własnych. Oznaczmy elementy macierzy [G] przez  $G_{jk}$ , zatem:

$$G = \begin{bmatrix} g_{12}, \dots, & g_{1n} \\ g_{n1}, \dots, & g_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Wartości własne wyznaczane są z równania:

$$[G] [Q] = \lambda [Q], \quad (3.53)$$

gdzie [Q] jest wektorem (w rozważanych przypadkach jest to wektor kolumnowy), a  $\lambda$  jest liczbą zespoloną. Równanie (3.53) posiada rozwiązanie niezerowe tylko w tym przypadku, kiedy wyznacznik współczynników jest równy zero, czyli:

$$\begin{vmatrix} g_{11} - \lambda, & g_{12}, \dots, & g_{1n} \\ g_{21}, & g_{22} - \lambda, \dots, & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n, 1} \dots & \dots & g_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.54)$$

W przypadku równania (3.48) wyznacznik dla określenia wartości własnych jest:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda, & \frac{igH\Delta t}{\Delta h} \sin \Delta h \\ \frac{i\Delta t}{\Delta h} \sin \Delta h, & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.55)$$

skąd:

$$(1 - \lambda)^2 - gH \left( \frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 \sin^2 \Delta h = 0, \quad (3.56)$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i \sqrt{gH} \frac{\Delta t}{\Delta h} \sin \Delta h.$$

A więc w wybranym przykładzie jedna z wartości własnych jest zawsze większa od jedności i dlatego też nigdy nie obserwujemy stabilności.

Przeanalizowany prosty przykład pozwolił zapoznać się z metodyką badania stabilności układu równań różnicowych. Przejdźmy teraz do przypadku generalnego reprezentowanego przez układ równań (3.1), (3.2), (3.3), tarcie styczne przy dnie wybierzemy w postaci wyrażenia



(3.9). Wprowadzimy następującą postać numeryczną tego układu zaproponowaną przez Fischera (1959).

$$Q_{x,j,k}^{1+1} = Q_{x,j,k}^1 + \frac{\Delta \text{tg} H}{2\Delta h} (\xi_{j+1,k}^1 - \xi_{j-1,k}^1) + \Delta t (f Q_{y,j,k}^1 - r Q_{x,j,k}^1 + \tau_{x,j,k}^1) \quad (3.57)$$

$$Q_{y,j,k}^{1+1} = Q_{y,j,k}^1 + \frac{\Delta \text{tg} H}{2\Delta h} (\xi_{j,k+1}^1 - \xi_{j,k-1}^1) + \Delta t (-f Q_{x,j,k}^1 - Q_{y,j,k}^1 + \tau_{y,j,k}^1) \quad (3.58)$$

$$\xi_{j,k}^{1+1} = \xi_{j,k}^1 + \frac{\Delta t}{2\Delta h} (Q_{x,j+1,k}^{1+1} - Q_{x,j-1,k}^{1+1} + Q_{y,j,k+1}^{1+1} - Q_{y,j,k-1}^{1+1}). \quad (3.59)$$

Zwróćmy uwagę, że w tym zapisie numerycznym wyrażenia wydatków objętościowych w równaniu ciągłości zostały przyjęte nie w chwili 1, ale w chwili 1+1. Chwył ten związany jest oczywiście z zapewnieniem stabilności. Obliczenia przebiegają w sposób następujący: zakładając, że w początkowym momencie  $t = t_0$ , kiedy wszystkie zmienne zależne są równe zero, zaczyna wiać wiatr ( $\tau_x \neq 0$  oraz  $\tau_y \neq 0$ ). Z równania (3.57) oraz (3.58) znajdujemy wydatki objętościowe  $Q_x^{1+1}$  oraz  $Q_y^{1+1}$ . W następnym kroku postępujemy podobnie, z tym że oprócz sił naprężeń stycznych wiatru znane będą również wydatki  $Q_x$  oraz  $Q_y$  wraz ze zmianami poziomu  $\xi$  z poprzedniego kroku czasowego.

Poszukiwanie stabilności poprowadzimy dla przypadku, kiedy  $\tau_x = \tau_y = 0$  oraz  $H = \text{const.}$ , podstawiając najpierw wyrażenie (3.46), (3.47) do układu równań (3.57), (3.58), (3.59) otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -ia & -ia & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{x,j,k}^{1+1} \\ Q_{y,j,k}^{1+1} \\ \xi_{j,k}^{1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - r\Delta t & \Delta t f & g H i a \\ -f\Delta t & 1 - r\Delta t & g H i a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{x,j,k}^1 \\ Q_{y,j,k}^1 \\ \xi_{j,k}^1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

lub w postaci nieco prostszej:

$$[A] [Q^{1+1}] = [B] [Q^1], \quad (3.60a)$$

gdzie  $a = \frac{\Delta t}{\Delta h} \sin \Delta h$ .



Macierz  $[G]$  powstająca w rezultacie mnożenia  $[A]^{-1} [B]$  przyjmuje dla równania (3.60) następującą postać:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 - r\Delta t, & f\Delta t, & ia \\ -f\Delta t, & 1 - r\Delta t, & ia \\ ia(1 - r\Delta t - f\Delta t), & ia(1 + f\Delta t - r\Delta t), & 1 - 2a^2 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Wartości własne macierzy  $[G]$  określone mogą być z równania 3 stopnia, przy tym otrzymujemy dość skomplikowane kryterium stabilności:

$$gH \left( \frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 < 1 - \frac{r\Delta t}{2} + \sqrt{1 - r\Delta t + f^2 (\Delta t)^2}, \quad (3.62)$$

$$\Delta t < \frac{r}{f^2}. \quad (3.63)$$

W przypadku, gdy  $r = f = 0$ , z równania (3.62) otrzymujemy prosty i powszechnie znany warunek:

$$\sqrt{gH} \frac{\Delta t}{\Delta h} < \sqrt{2}. \quad (3.64)$$

Gdybyśmy w równaniu różnicowym (3.59) nie zapisali  $Q_x$  oraz  $Q_y$  w chwili  $l + 1$ , ale w chwili  $l$ , to wtedy macierz  $[G]$  przyjęłaby postać:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 - r\Delta t, & f\Delta t, & ia \\ -ft, & 1 - r\Delta t, & ia \\ ia, & ia, & 1 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Jedna z wartości własnych tej macierzy jest zawsze większa od jedności i taki zatem układ numeryczny nie spełnia warunku stabilności.

Wykonane teoretyczne badania stabilności mają sens tylko dla różnicowych równań liniowych ze stałymi współczynnikami. Zmienność współczynników uwzględnia się często przez wprowadzenie ich amplitudy zmian. Ale ta zmienność, jak również warunki brzegowe (których nie rozważaliśmy dotychczas) mogą wprowadzić zaburzenia w stabilnym przebiegu rozwiązania. Stąd też w przypadku znacznej zmienności pożyteczna okazuje się metoda wygładzania. Zamiast wartości  $Q_j^l$  w prawej części równań (3.57), (3.58), (3.59) wprowadza się „średnią” z pięciu węzłów siatki przestrzennej sąsiadujących z sobą:

$$Q_{j,k}^l = Q_{j,k}^l + \frac{1-\alpha}{4} (Q_{j+1,k}^l + Q_{j-1,k}^l + Q_{j,k-1}^l + Q_{j,k+1}^l), \quad (3.66)$$

gdzie  $\alpha$  — współczynnik liczbowy  $0 \leq \alpha \leq 1$ .



Z fizycznego punktu widzenia wyśrednianie jest analogiczne do wprowadzenia dodatkowego tarcia do układu mechanicznego, co oczywiście sprzyja zwiększaniu stabilności.

Porównując wartości własne z wyśrednieniem, stwierdzamy, że poprzednie wartości własne  $\lambda$  należy pomnożyć przez  $\alpha + (1 - \alpha) \sin \Delta h$ .

W trakcie omawiania warunków stabilności stwierdziliśmy, że nieliniowe równania wymagają oddzielnego ujęcia. Wskażemy teraz pewną drogę rozwiązania tego zagadnienia. Wprawdzie rozwiązanie to nie jest idealne, ale daje wskazówki co do zachowania się stabilności równania różnicowego. Metoda polega na linearyzacji poprzez przyjęcie wyrażen nieliniowych w postaci współczynników o określonej amplitudzie zmian. Przytoczmy najprostszy przykład. Niech ruch wody odbywa się tylko w obecności sił tarcia dennego w postaci nieliniowej;

$$\frac{\delta Q_x}{\delta t} = -\rho g c^{-2} Q_x^2 = -k Q_x Q_x = -k |Q| Q_x, \quad (3.67)$$

odpowiadającą postacią numeryczną jest:

$$Q_{x,j}^{l+1} = Q_{x,j}^l - k \Delta t |Q| Q_{x,j}^l. \quad (3.68)$$

Przyjmijmy  $|Q|$  jest stałe, a następnie podstawiając  $Q_x$  w postaci wyrażenia (3.28a) otrzymamy:

$$\lambda - 1 = -k |Q| \Delta t. \quad (3.69)$$

Kryterium stabilności wymaga, aby  $|1 - k|Q|\Delta t| \leq 1$ , co narzuca określone warunki na wybór kroku czasowego oraz amplitudy zmian wydatku  $|Q|$ .

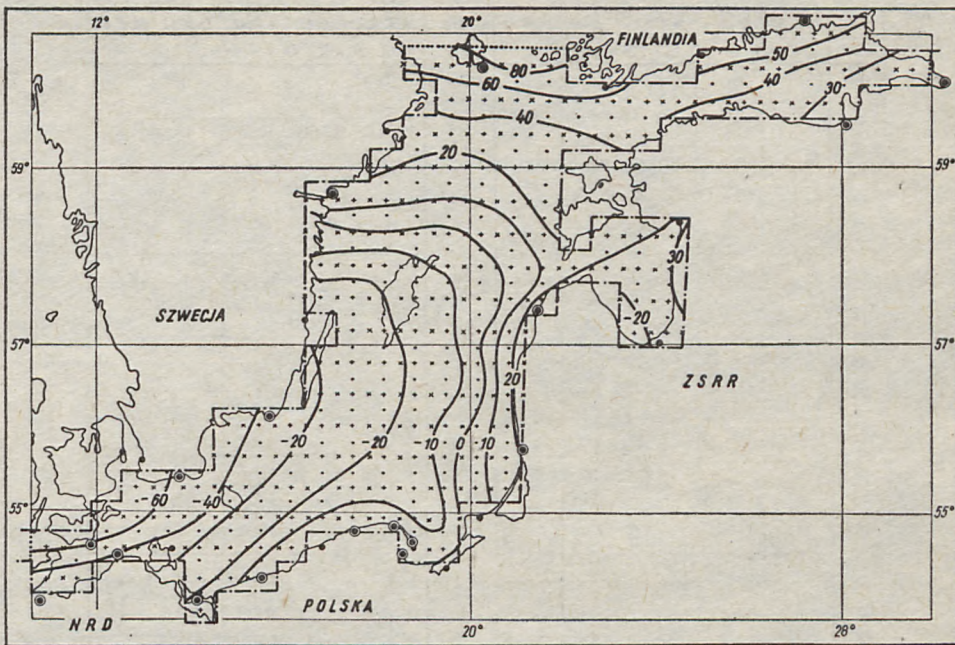
Bezwzględna stabilność otrzymamy, przyjmując prawą stronę (3.67) w chwili czasowej  $l+1$ , wtedy:

$$\lambda = \frac{1}{1 + k |Q| \Delta t} \leq 1. \quad (3.70)$$

## 7. NIEOKRESOWE WAHANIA POZIOMU WÓD BAŁTYKU ODTWORZONE METODĄ HYDRODYNAMICZNO-NUMERYCZNĄ

Jak już wspominaliśmy, podstawy teoretyczne metody hydrodynamiczno-numerycznej (HN) zostały zbudowane w połowie lat pięćdziesiątych, przy czym prace Hansena (1956) jako pierwsze wskazały kierunek dalszego rozwoju. Następnie Platzman (1958) wykorzystał metodę HN do odtwarzania przebiegu fali powodziowej. Na Bałtyku prace podobnego typu zostały wykonane przez Svansona (1959), Uusitalo (1962). W Polsce





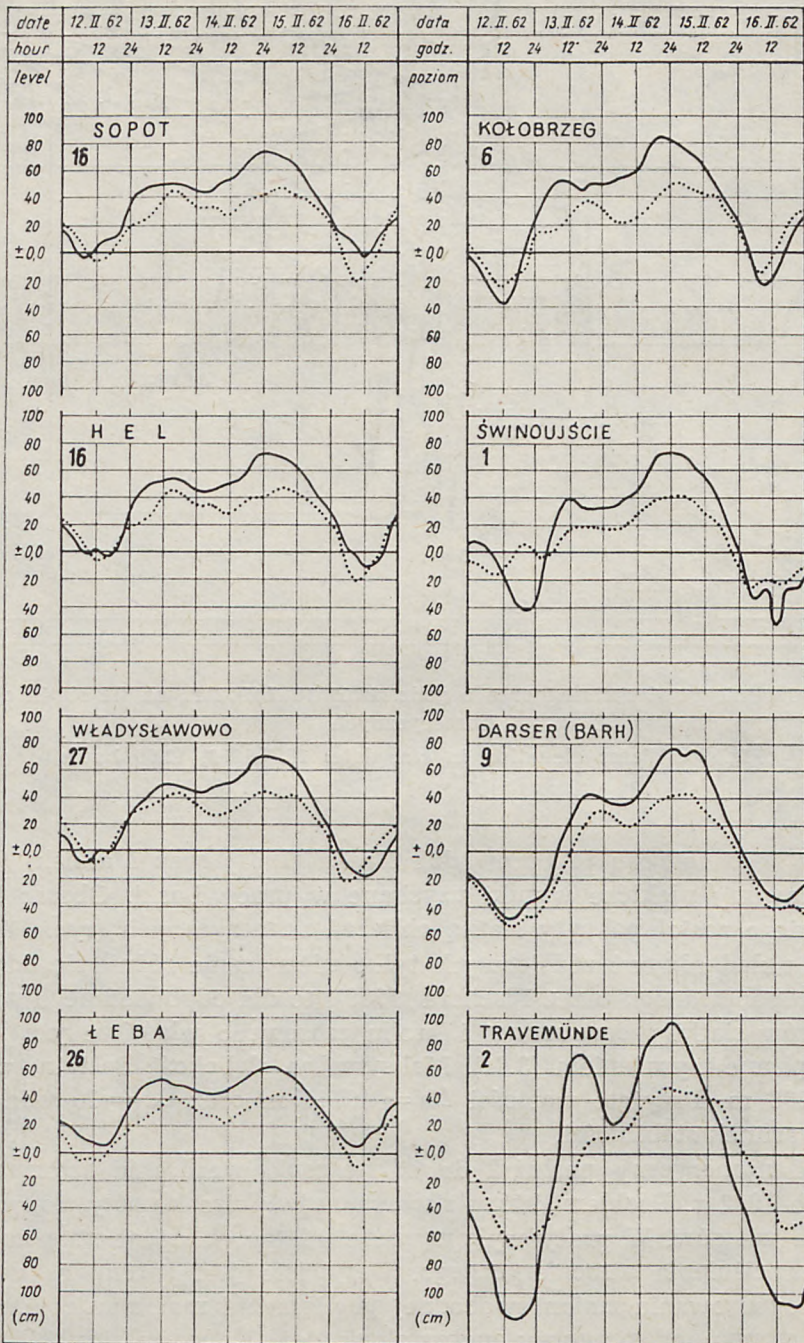
Ryc. 38. Izolinie powierzchni morza o godz. 12.00 16 II 1962 r., na tle siatki obliczeń numerycznych

Fig. 38. Water elevation in cm, date: 16.II.1962, 12.00 hours

prace z tego zakresu przeprowadził Laska (1967) oraz Maliński (1973), Przedstawimy niektóre wyniki uzyskane w pracy Laska. Obszar Morza Bałtyckiego został pokryty siatką obliczeń numerycznych (ryc. 38). Ponieważ układ równań różnicowych tylko nieznacznie różnił się od układu zaproponowanego przez Fischera (1959), to dla odpowiedniego wyboru wymiarów siatki przestrzennej i kroku czasowego właściwe jest kryterium opisane wyrażeniem (3.64). Maksymalna głębokość Bałtyku wynosi około 200 m. Przyjęte wartości  $\Delta h = 40744$  m oraz  $\Delta t = 10$  min spełniają warunek stabilności.

Układ numeryczny posłużył do odtworzenia wezbrania sztormowego z lutego 1962 r. Problem, który stwarza największe kłopoty, to obliczenie pola wiatrów. W pracy wykorzystano wiatry obliczone na podstawie rozkładu ciśnienia atmosferycznego. Oczywiście jest zatem, że dokładność prognozowania zmian swobodnej powierzchni morza zależy w znacznym stopniu od prognozy meteorologicznej. Końcowe wyniki eksperymentu przedstawione na ryc. 39 dają porównanie wartości obliczonych i obserwowanych.





Ryc. 39. Krzywe zmian poziomu wód: — rzeczywiste, ..... obliczone

Fig. 39. Sea level curves: — observed, ..... calculated



## 8. BADANIA NIEOKRESOWYCH ZMIAN POZIOMU MORZA METODAMI STOCHASTYCZNYMI

W podrozdziale *Przekształcenia liniowe funkcji losowych...* wprowadziliśmy pojęcie funkcji przenoszenia, kiedy na wejście układu liniowego oddziałują dwa czynniki losowe (wiatr i ciśnienie), a na wyjściu układu rozpatrujemy jedną funkcję losową (np. zmiany poziomu morza). Te ogólne założenia ujęte za pomocą wyrażeń (1.58a...1.59b) zastosujemy teraz do analizy wezbrań szturmowych, przy czym wykorzystamy pracę W. E. Priwalskiego (1968) dotyczącą Kaliningradu, sądząc, że wyniki uzyskane przez niego będą mogły być zastosowane do polskich portów.

Przypomnijmy, że w tego rodzaju rozważaniach wahania powierzchni morza rozpatrywane są jako wynik liniowej superpozycji procesów losowych na wyjściu liniowego układu. Wejściowe procesy losowe, a więc wiatr i ciśnienie, są stacjonarnymi funkcjami czasu. Problem polega na obliczeniu funkcji przenoszenia (wyrażenia 1.59a, 1.59b) na podstawie realizacji wejściowych funkcji losowych, a następnie wykorzystaniu funkcji przenoszenia do predykcji zmian poziomu morza, wychodząc z dowolnych wartości ciśnienia i wiatru.

Rozpatrzone zostały dwa przypadki: a) procesy wejściowe wykazują korelację (współczynnik korelacji równy 1), b) nie ma żadnej korelacji między procesami wejściowymi. Za dane dla dalszych analiz posłużyły roczne (1962) obserwacje ciśnienia i wiatru wykonane w odstępach 6-godzinnych w Kaliningradzie.

Zgodnie z wyrażeniami 1.58a, 1.58b, dysponując takimi obserwacjami możemy obliczyć widmowe gęstości, a na ich podstawie funkcje przenoszenia  $P_1(\omega)$  i  $P_2(\omega)$ . Tak obliczone funkcje będą wykorzystane w przyszłości do predykcji zmian poziomu morza za pomocą wyrażenia:

$$y = y_1 + y_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\tau) x_1(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} p_2(\tau) x_2(t - \tau) d\tau, \quad (3.71)$$

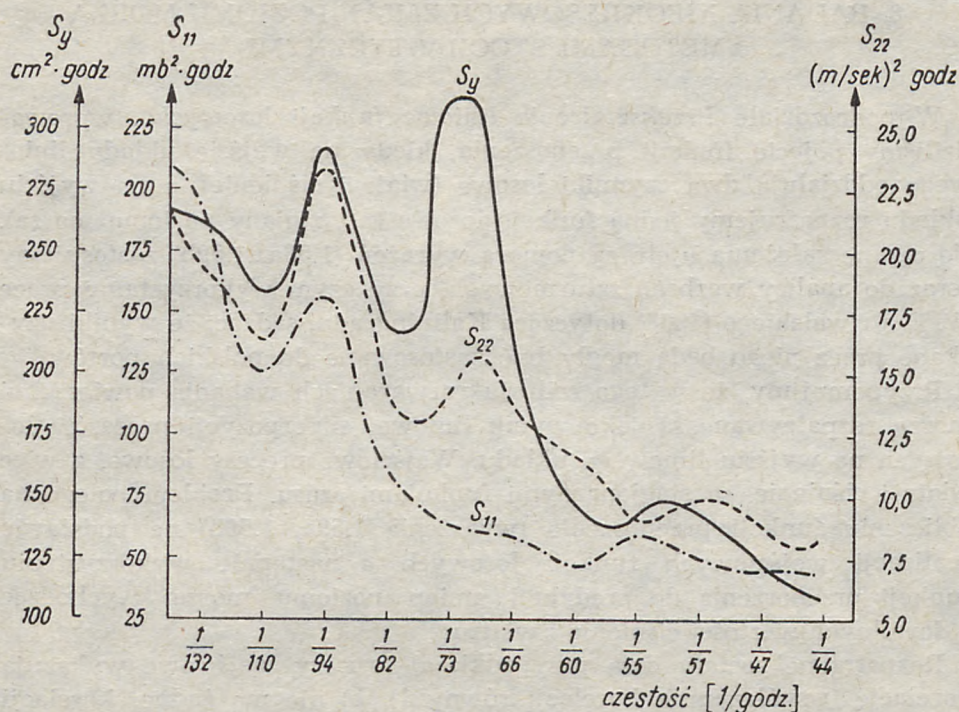
przy założeniu, że procesy wejściowe,  $x_1$  — ciśnienie oraz  $x_2$  — wiatr, są znane na podstawie na przykład prognozy meteorologicznej.

Przedstawimy funkcje przenoszenia  $P_1$  oraz  $P_2$  w postaci wykładniczej:

$$P_1 = |P_1|e^{-i\varphi_1}; \quad P_2 = |P_2|e^{-i\varphi_2} \quad (3.72)$$

Zgodnie z wyrażeniem (1.58) wielkości występujące w (3.72) są zależne od widmowych gęstości; ciśnienia atmosferycznego —  $S_{11}$ , prędkości wiatru (składowa normalna do brzegu) —  $S_{22}$  oraz zmian powierzchni morza —  $S_y$ .





Ryc. 40. Widmowe gęstości wiatru ( $S_{22}$ ), ciśnienia atmosferycznego ( $S_{11}$ ) oraz zmian poziomu morza ( $S_y$ ) w r. 1968 w Leningradzie

Fig. 40. Power spectrum of wind ( $S_{22}$ ), atmospheric pressure ( $S_{11}$ ) and water level changes ( $S_y$ ) (Leningrad, 1968)

Wielkości te obliczone przez Priwalskiego naniesiono na ryc. 40; obserwujemy tutaj zmiany poziomu morza z podstawowymi okresami 73 godz. oraz 94 godz.

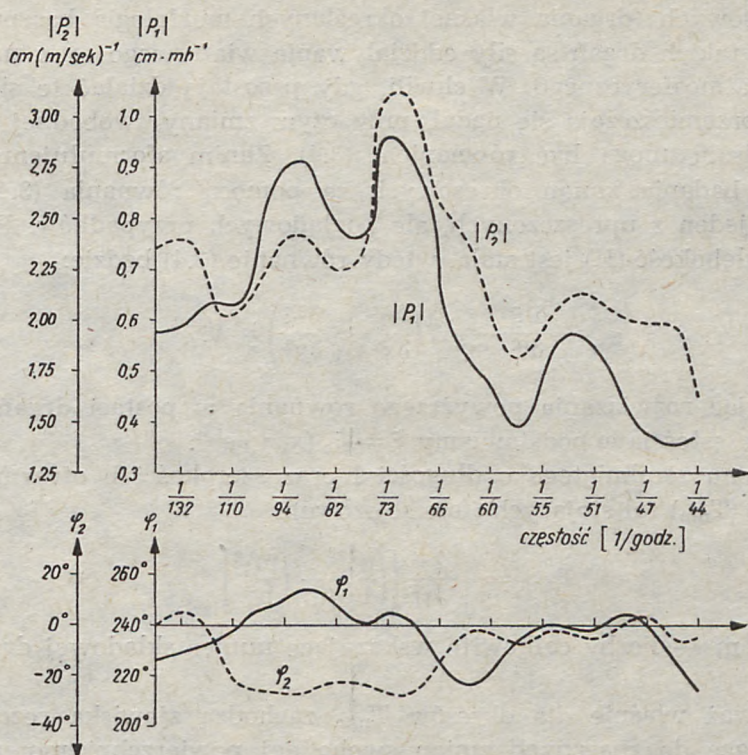
Rozpatrzmy przypadek, kiedy procesy wejściowe nie wykazują żadnej korelacji. Zbudowane amplitudy funkcji przenoszenia  $|P_1|$ ,  $|P_2|$  oraz fazy  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  pokazane zostały na ryc. 41. Jak wykazują przesunięcia fazowe  $\varphi_1$ , zmiany ciśnienia wyprzedzają w czasie zmiany poziomu morza.

Według obliczonych funkcji przenoszenia wykonamy z kolei operację odwrotną i obliczymy zgodnie z wyrażeniem (1.56) widmową gęstość zmian poziomu morza:

$$S_y = |P_1(\omega)|^2 S_{11} + |P_2(\omega)|^2 S_{22}, \quad (3.73)$$

będzie to sprawdzian naszych poprzednich założeń.





Ryc. 41. Amplitudy funkcji przenoszenia  $|P_1|$ ,  $|P_2|$  oraz fazy  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$   
 Fig. 41. Amplitudes of the transfer functions  $|P_1|$ ,  $|P_2|$  also phase  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$

W końcu posiadając funkcje przenoszenia  $P_1$  i  $P_2$  poprowadzono prognozę zmian poziomu morza, wychodząc z wiatru i ciśnienia i wykorzystując wyrażenie (3.71).

## 9. OKRESOWE WAHANIA POZIOMU MORZA

Analizując zapisy zmian poziomu morza, często napotykamy odcinki, kiedy wahania wykazują wyraźną okresowość. Najbardziej znane okresowe wahania to pływy, zjawisko wywołane siłami przyciągania Księżyca i Słońca. Ponieważ siły te posiadają zdecydowaną okresowość bliską do 12 godz., 24 godz., stąd też zmiany poziomu morza generowane pod wpływem tych sił wykazują tę samą okresowość. W Morzu Bałtyckim oddziaływanie sił pływowych na zmiany poziomu jest znikome. Wysokość pływu jest rzędu 2—3 cm. Okresowość zmian poziomu w Bałtyku i morzach podobnych wynika przede wszystkim z istnienia wahań



rezonansowych (drgania własne) określonych morfologią basenu. Generatorem takich drgań są siły oddziaływania wiatrowego oraz zmiany ciśnienia atmosferycznego. W chwili, gdy przestają działać te siły, masy wodne przemieszczają się nadal, przy czym zmiany swobodnej powierzchni opisane mogą być równaniem (3.4). Zanim sformułujemy ogólne metody badania zmian okresowych za pomocą równania (3.4) rozpatrzmy jeden z uproszczonych, ale poglądowych przypadków. Przyjmijmy, że głębokość ( $H$ ) jest stała, wtedy równanie (3.4) będzie:

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} - gH \left( \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \xi}{\delta y^2} \right) = 0. \quad (3.74)$$

Poszukując rozwiązania powyższego równania w postaci drgań okresowych z częstością  $\omega$  podstawiamy  $\xi = \xi_0(x, y) e^{i\omega t}$ .

Dla basenu zamkniętego o długości  $l$  oraz szerokości  $b$  otrzymamy dla okresów ( $T_{n,m}$ ) fal stojących (fale sejszowe):

$$T_{n,m} = \frac{2}{\sqrt{gH}} \left[ \left( \frac{n}{l} \right)^2 + \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (3.75)$$

gdzie  $n, m$  — liczby całkowite wskazujące numer składowej drgań własnych.

Ponieważ właśnie dla okresów  $T_{n,m}$  zachodzą zjawiska rezonansowe prowadzące do znacznych zmian swobodnej powierzchni morza, przejdziemy do sformułowania zagadnienia drgań własnych dla zbiornika wodnego z dowolną morfologią. Zagadnienie to możemy podzielić na dwie części:

- poszukiwanie okresów (częstości) własnych,
- poszukiwanie kształtu swobodnej powierzchni dla konkretnego okresu drgań własnych. Część a) jest niezmiernie bliska zagadnieniu wartości własnych  $\lambda$  macierzy, sformułowanego w podrozdziale *Stabilność układu równań różnicowych*. Przyjmując w równaniu (3.4) zmiany powierzchni akwenu w postaci  $\xi = \xi(x, y) e^{i\omega t}$ , otrzymamy równanie:

$$\begin{aligned} \xi (\omega^2 - f^2) - fg \left( \frac{\delta}{\delta x} H \frac{\delta \xi}{\delta y} - \frac{\delta}{\delta y} H \frac{\delta \xi}{\delta x} \right) + \\ + g \left( \frac{\delta}{\delta x} H \frac{\delta \xi}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta y} H \frac{\delta \xi}{\delta y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Przepiszemy (3.76) w postaci operatorowej:

$$L\xi = \omega^2 \xi. \quad (3.76a)$$

Dla konkretnego basenu rozwiązanie tego równania w celu znalezienia częstości własnych może być prowadzone wyłącznie metodami nume-



rycznymi. Przyjmując krok siatki numerycznej jako  $\Delta h$  wzdłuż osi  $x$  oraz  $y$  zapiszemy równanie (3.76a) jako:

$$\begin{aligned} L_n \xi = a(j, k) \xi_{j+1, k} + b(j, k) \xi_{j-1, k} + c(j, k) \\ \xi_{j, k+1} + d(j, k) \xi_{j, k-1} - e(j, k) \xi_{j, k} = \omega^2 \xi_{j, k}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

gdzie  $a, b, c, d, e$  — współczynniki.

Równanie (3.77) przedstawia właściwie układ równań dla węzłów  $(j, k)$  siatki obliczeń numerycznych.

Częstość własna  $\omega^2$  w tym równaniu posiada skończoną ilość wartości, równą ilości węzłów siatki obliczeń numerycznych, w przeciwieństwie do równania (3.75), gdzie występuje nieskończona ilość tych wartości.

Rozwiązanie (3.77) w celu znalezienia  $\omega^2$  można prowadzić metodami szczegółowo dyskutowanymi przez Wilkinsona (1965) i Faddejewą (1959).

Po znalezieniu szeregu wartości własnych  $\omega_{1,1}^2; \omega_{1,2}^2; \dots; \omega_{j,k}^2$  przejdziemy do poszukiwania kształtu swobodnej powierzchni. Jest to zagadnienie niezmiernie trudne, chociaż wydaje się, że wystarczające byłoby rozwiązać równanie (3.77) przy danym  $\omega^2$ , przyjmując odpowiednie warunki brzegowe na całej linii brzegowej akwenu morskiego. Niestety informacje o wartościach zmian poziomu wzdłuż linii brzegowej są praktycznie niedostępne.

Ta przeszkoda jest niestety nie do pokonania (wyłączając proste akwenty w kształcie koła, prostokąta itp.). W tej sytuacji analizę drgań okresowych w Bałtyku poprowadzimy, wykorzystując dane mareograficzne dla obliczeń widmowej gęstości, a następnie analizując maksima występujące w wykresie.

## 10. SEJSZE ZATOKI GDAŃSKIEJ

Jak wiadomo, Zatoka Gdańska znajdująca się w południowej części Bałtyku posiada półkolisty kształt i jest częściowo zamknięta przez półwysep Hel. Część zatoki w pobliżu półwyspu zwana jest Zatoką Pucką. Mareografy, których zapisy stanowią materiał źródłowy dla obliczeń widmowej gęstości, znajdują się w punktach 1 oraz 2 zatoki (ryc. 44, 45, 46). W celu przebadania zmian okresowych wykorzystamy widmową gęstość, w zatoce bowiem często występują zmiany nieokresowe, które silnie zniekształcają obraz zmian okresowych. Chociaż widmowa gęstość wskaże nam istnienie pewnych okresowych drgań w widmie zmian poziomu morza, ciągle pozostaje niejasny przebieg tych oscylacji w obszarze zatoki. Dlatego też wykorzystując znane okresy z rozkładu widmowej gęstości rozwiążemy metodą numeryczną równanie zmian powie-



rzchni (3.76) w zastosowaniu do Zatoki Gdańskiej. Dodajmy, że sejsze Zatoki Gdańskiej o okresie 2 godz. były badane przez G. Neumana (1944), który zastosował tutaj swoją klasyczną teorię rezonatorów akustycznych, zmiany zaś z przedziału 40—50 były opisane przez S. Szymborskiego (1955). W dalszym ciągu będziemy całkowicie opierać się na rezultatach uzyskanych w pracy Kowalika (1968a).

### 10.1. Wstępne przygotowanie danych

Blackman i Tuckey (1958) wykazali, że widmowa gęstość energii zmian długookresowych może mieć wpływ na widmową gęstość zmian krótkookresowych (a więc w naszym przypadku sejsze Bałtyku mogą mieć wpływ na sejsze Zatoki Gdańskiej), dlatego rozdzielimy drgania krótkookresowe od zmian długookresowych, wykonując filtrację danych mareograficznych. Wymiary Zatoki oraz jej głębokość ograniczają okresy własne ( $T$ ) z góry, czyli możemy przyjąć, że  $T \leq T_{\max}$ . Zmiany z okresami  $T_{\max} \leq T$ , które nie są przedmiotem naszych zainteresowań zostaną odfiltrowane. Zażyczymy nasz przedział okresów własnych do  $T_{\max} \cong \cong 5$  godz. Rozważmy teraz zmiany poziomu morza jako funkcję czasu  $\xi(t)$  albo odpowiadające jej wartości dyskretne  $\xi^j(t)$  otrzymane na podstawie obserwacji.

Pierwszym etapem filtracji jest znalezienie krzywej wygładzonej:

$$\bar{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \xi(\tau) d\tau, \quad (3.78)$$

gdzie  $f(t-\tau)$  — wyrażenie opisujące filtr.

Odejmując wartość wygładzoną  $\bar{\xi}(t)$  od wartości  $\xi(t)$  otrzymamy zmiany krótkookresowe  $\xi'(t)$ :

$$\xi(t) - \bar{\xi}(t) = \xi'(t). \quad (3.79)$$

Wyrażenie ogólne (3.78) zamienimy teraz cosinus filtrem, a wartość wygładzona obliczana będzie jako:

$$\bar{\xi}^k = \frac{1}{n} \sum_{j=k-\frac{n}{2}}^{k+\frac{n}{2}} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi(k-j)}{n} \right] \xi^j. \quad (3.80)$$

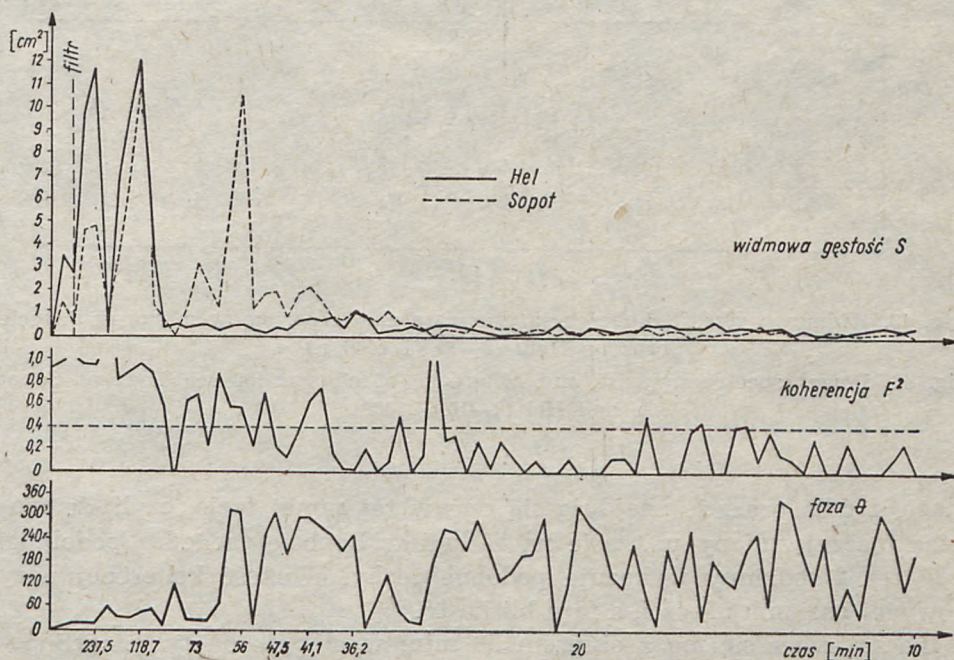
W wyrażeniu (3.80) dla uzyskania wygładzonej wartości z indeksem  $k$  wykorzystujemy  $n$  wartości zmieniających od  $-\frac{n}{2}$  do  $\frac{n}{2}$  wokół  $k$ ;  $n$  — jest wybierane zgodnie z wymaganym wygładzeniem.



## 10.2. Widmowa gęstość zmian poziomów Zatoki Gdańskiej

Dla zbadania widmowej gęstości wybrano zapisy mareograficzne w Sopocie (2) oraz na Helu (1). W przypadku pomiarów w dwóch punktach obliczymy nie tylko widmową gęstość w punktach (1) oraz (2), lecz także koherencję (spójność) i fazę charakteryzujące drgania jednocześnie w dwóch wybranych punktach (wyrażenia 1.45 i 1.48). Wyniki obliczeń przedstawione zostały na ryc. 42 i 43. Na ryc. 42 widmowa gęstość została obliczona na podstawie danych odczytanych z mareogramu w odstępach 5-minutowych od 8—12 V 1958 r. Podobnie rzecz ma się z ryc. 43, ale odnosi się ona do przedziału czasowego 8—10 V 1960 r.

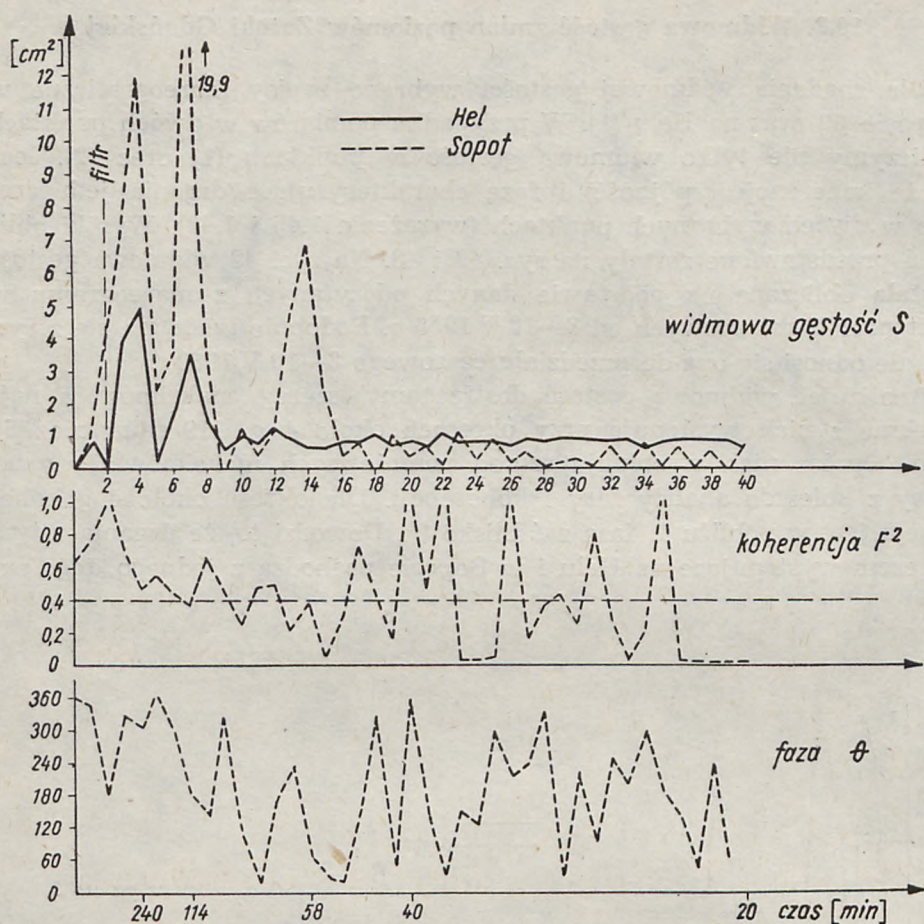
Analizując widmową gęstość dostrzegamy szereg maksimów, a największe z nich występują przy okresach około 4 g, 119 min, oraz 56 min. Oprócz nich występuje szereg pomniejszych maksimów. Przystąpimy z kolei do analizy fazy i koherencji. Dla okresu około 4 g koherencja jest w pobliżu 1, faza zaś blisko  $0^\circ$ . Dowodzi to, że drgania z tym okresem występujące na Helu i w Sopocie pochodzą z jednego, tego sa-



Ryc. 42. Widmowa gęstość, faza oraz koherencja zmian poziomu morza w Sopocie i na Helu (8—12 V 1958 r.)

Fig. 42. Power spectrum, phase and coherence of the water level changes at Sopot and Hel (8—12.V.1958)





Ryc. 43. Widmowa gęstość, koherencja oraz faza zmian poziomów morza w Sopocie oraz na Helu (8—10 VI 1960 r.)

Fig. 43. Power spectrum, phase and coherence of changes of sea level at Sopot and Hel (8—10.VI.1960)

mego, źródła oraz, że znajdują się one w tej samej fazie, czyli, że mówiąc inaczej zmiany w czasie na Helu i w Sopocie zachodzą podobnie.

Okres 2-godzinny wykazuje podobne cechy. Wartość koherencji leży powyżej poziomu ufności, a faza bliska  $0^\circ$ .

Inaczej rzecz się ma z okresem 56 min; występuje on tylko w Sopocie, na Helu nie ma drgań, z tym okresem, stąd wartości fazy i koherencji są tu przypadkowe.



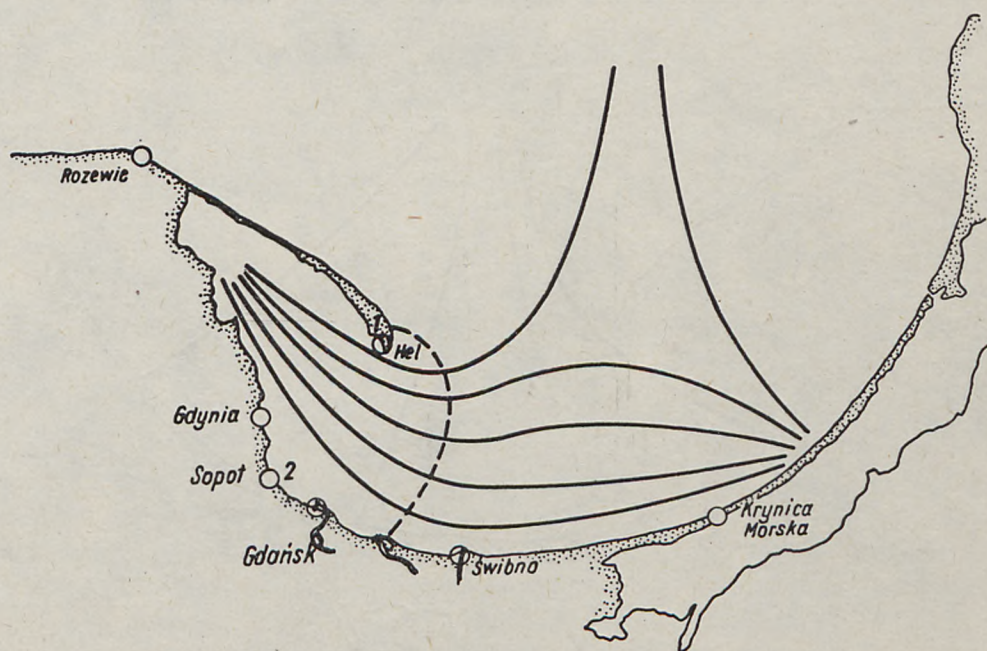
### 10.3. Próba wyjaśnienia przebiegu przestrzennego drgań sejszowych

Punktem wyjściowym do dalszych badań będzie równanie (3.76), bez siły Coriolisa, nasze drgania bowiem leżą w dali od okresu wahadłowego:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g \left[ \frac{\partial}{\partial x} H \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} H \frac{\partial \xi}{\partial y} \right] = 0. \quad (3.81)$$

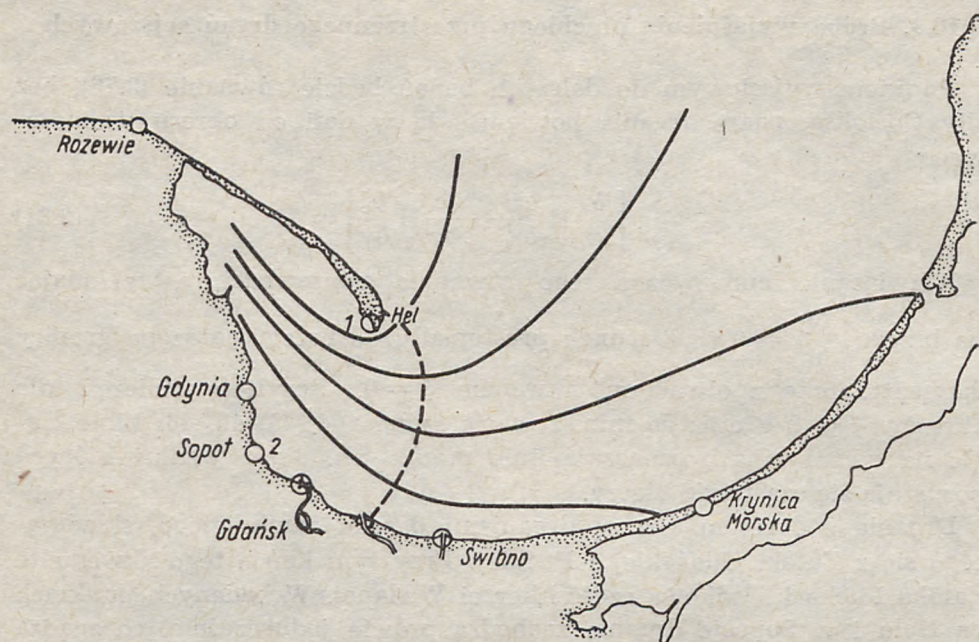
Rozwiązanie numeryczne tego równania poprowadzimy, zakładając na brzegu  $\frac{\partial \xi}{\partial n} = 0$  ( $n$  kierunek prostopadły do brzegu) oraz na granicy łączącej zatokę z otwartym akwenem  $\xi = 0$ . Rezultaty obliczeń dla okresów 4 g, 2 g oraz 56 min. zawarte są na ryc. 44, 45, 46. Linie ciągłe na tych rycinach oznaczają linie prądu, tzn. linie wzdłuż których poruszają się cząsteczki cieczy.

Drgania z okresem 4 g są drganiami basenu zamkniętego, składającego się z Zatoki Gdańskiej i Puckiej. Przy tym końcu tego akwenu to Zatoka Pucka i środkowa część Mierzei Wiślanej. W badanych punktach na Helu i w Sopocie drgania zachodzą prawie jednocześnie, co zgadza się dobrze z obliczeniami fazy wykonywanymi poprzednio. Dodajmy, że

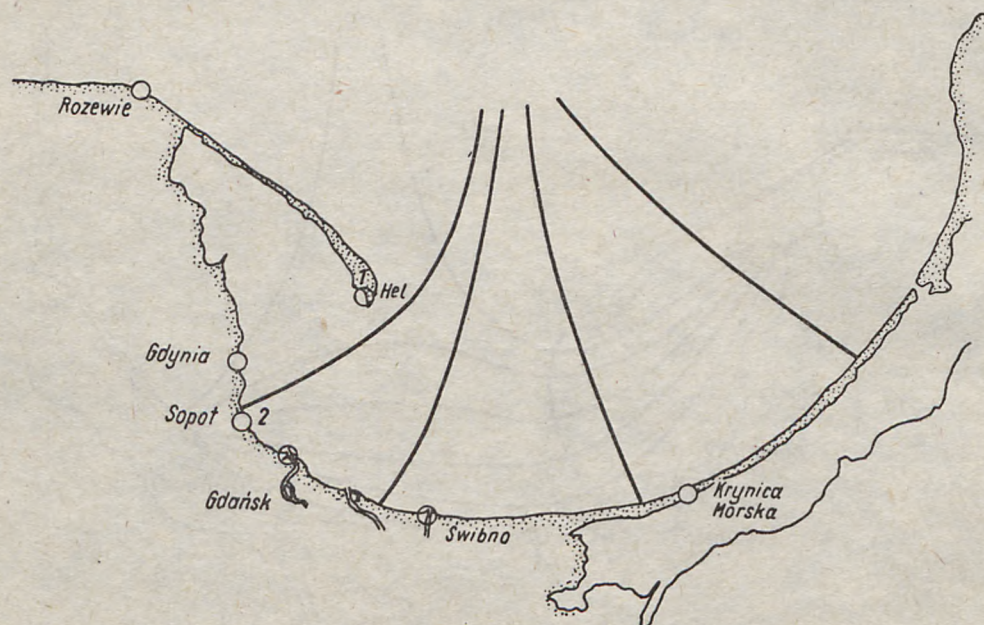


Ryc. 44. Linie prądu oraz linia węzłowa dla sejszy 4-godz.  
Fig. 44. Current isolines and nodal line of the 4 hour seiche





Ryc. 45. Linie prądu oraz linia węzłowa dla sejszy 2-godz.  
 Fig. 45. Current isolines and nodal line of the 2 hour seiche



Ryc. 46. Linie prądu dla sejszy 56-min.  
 Fig. 46. Current isolines for 56 min. seiche



część energii drgań sejszy 4 godz. wypromieniowuje na otwartą zatokę, co potwierdzają między innymi badania fal wewnętrznych na Głębi Gdańskiej, Kowalik (1966). Linia przerywana na rycinie 44 wyznacza przypuszczalny bieg linii węzłowej.

Przebieg sejszy 2 godz. przedstawia rycina 45; linie prądu wybiegają z Zatoki Puckiej; są to zatem fale stojące otwartej Zatoki Puckiej. Należy podkreślić, że taki przebieg sejszy Zatoki Puckiej sugerował również G. Neumann (1944).

Rycina 46 przedstawia przebieg drgań własnych dla okresu 56 min. Linie prądu biegną od środka Zatoki Gdańskiej do brzegów. Odrzucając półwysep Hel, sejsze z okresu 56 min. mogą być przyjęte jako drgania półkolistego basenu.

Przepisując równanie (3.81) dla obszaru kulistego z początkiem współrzędnych  $(\Theta, r)$  w środku zatoki, możemy zapisać rozwiązanie w postaci:

$$\xi = \xi_n J_n \left( \frac{\omega}{\sqrt{gH}} r \right) \cos n\Theta \cos \omega t, \quad (3.82)$$

na brzegu  $\left. \frac{\delta \xi}{\delta r} \right|_{r=r_0} = 0$ , skąd otrzymamy:

$$J'_n \left( \frac{\omega r_0}{\sqrt{gH}} \right) = 0. \quad (3.83)$$

Dla podstawowej składowej drgań kulistych otrzymamy:

$$J'_0 \left( \frac{\omega r_0}{\sqrt{gH}} \right) = J_1 \left( \frac{\omega r_0}{\sqrt{gH}} \right) = 0, \quad (3.84)$$

skąd dla częstości własnych:

$$\frac{\omega r_0}{\sqrt{gH}} = \frac{2\pi}{T} \frac{r_0}{\sqrt{gH}} = \pi \cdot 1,219; \quad \pi \cdot 2,230 \text{ itd.}$$

Przyjmując dla zatoki  $\sqrt{gH} \cong 22$  m/sek. oraz  $r_0 \cong 45$  km, otrzymamy okresy drgań własnych odpowiadające powyższym wartościom

$$T_0 \cong 55 \text{ min}, \quad T_1 \cong 30 \text{ min.}$$

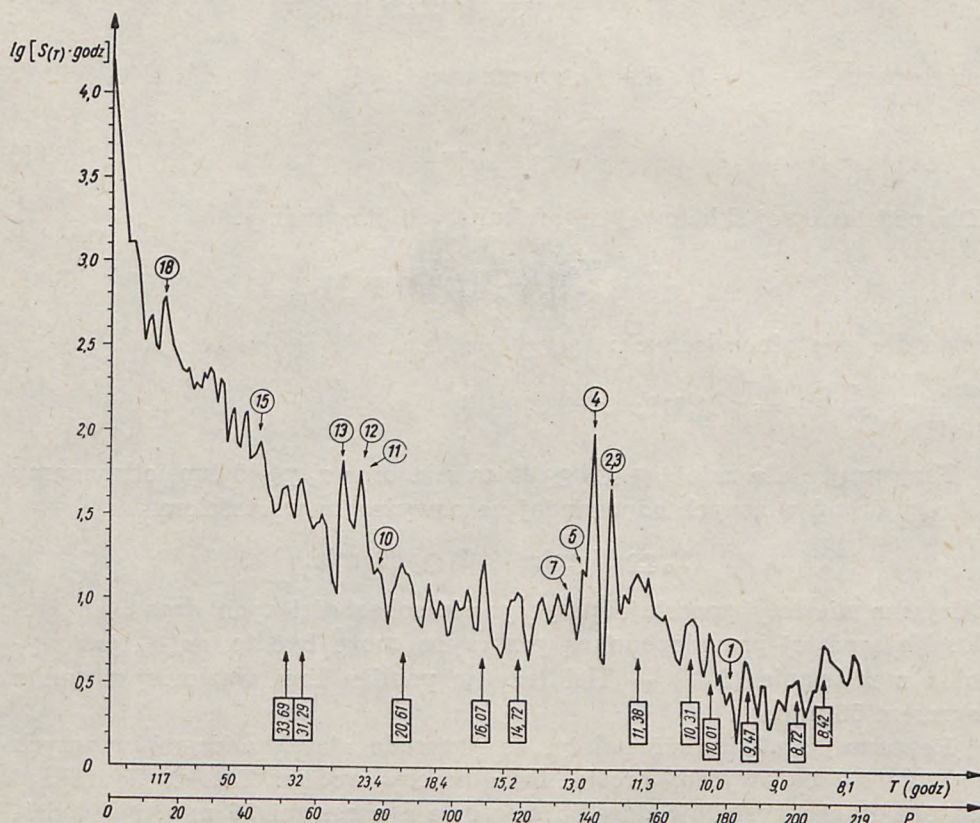
Niejasna niestety pozostaje przyczyna nieobecności tych drgań na Helu. Najbardziej prawdopodobną przyczyną może być to, że — jak wynika z równania (3.82) — Hel leży w pobliżu linii węzłowej drgań z okresem 56 min.

Reasumując stwierdzić należy, że przyroda zjawiska drgań własnych okazała się nadzwyczaj prosta. Dwa baseny wodne: Zatoka Gdańska i Zatoka Pucka posiadają drgania sejszowe z okresami 56 min. i 2 godziny, ponieważ jednak są one połączone, występują drgania wspólne z okresem 4-godzinnym.



## 11. OKRESOWE WAHANIA STANÓW WÓD U WYBRZEŻY POŁUDNIOWEGO BAŁTYKU

Rezultaty, które będą tutaj przedstawione zostały uzyskane w pracach Kowalika i Wróblewskiego (1973). W celu uzyskania miarodajnego materiału obserwacyjnego zebrano dane z 3 stacji mareograficznych polskiego wybrzeża, to jest z Nowego Portu, Kołobrzegu i Świnoujścia. Zmiany widmowej gęstości w przedziale 8—60 godz. obliczono na podstawie notowań stanów wody co 4 godz. w każdym z tych portów w r. 1968. Wobec wykazania znacznej koherencji dla oscylacji poziomów wody dla  $T \geq 43$  godz., obliczenia zmian dla  $T \geq 43$  godz. przeprowadzono na podstawie notowań mareografu w Świnoujściu. Wybór mareografu w Świnoujściu za podstawę obliczeń dla całego wybrzeża uzasadniony był długością okresu obserwacyjnego na tej stacji. Szczegóło-



Ryc. 47. Widmowa gęstość zmian poziomu morza w Nowym Porcie (1 I—31 XII 1968)

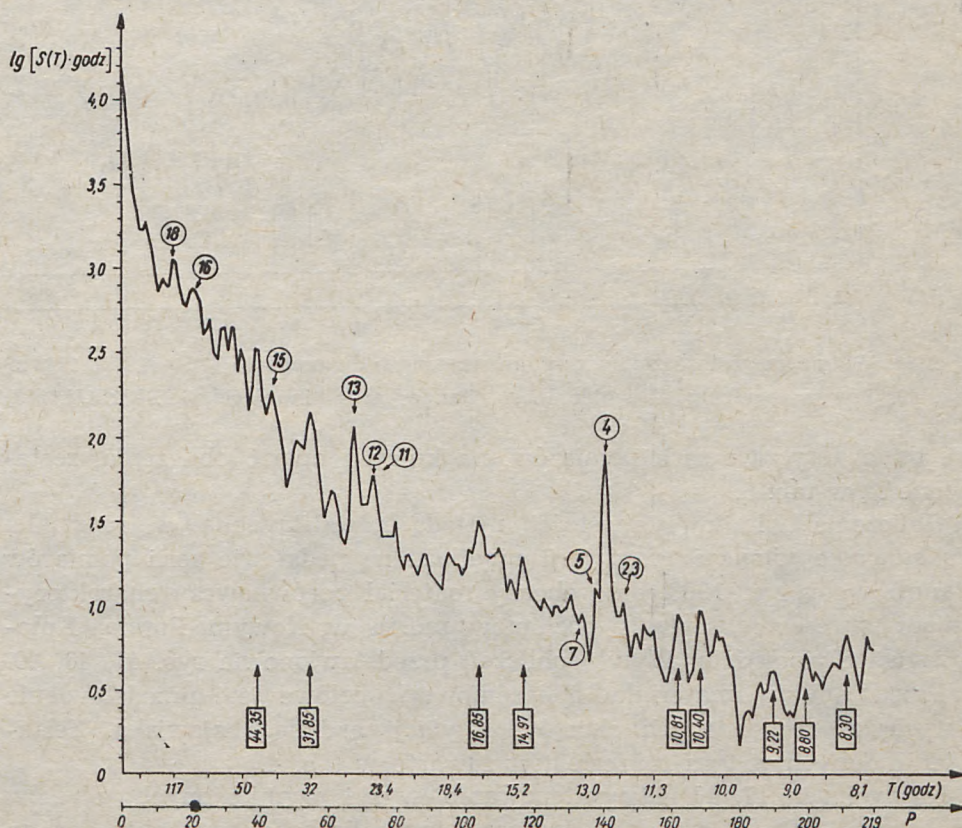
Fig. 47. Power spectrum of water level changes at Nowy Port (1.I.—31.XII.1968)



Tabela 3

Serie obserwacji stanów wody stanowiące podstawę obliczeń widmowych gęstości  
Series of data which are taken as a basis for the computation of the power spectrum

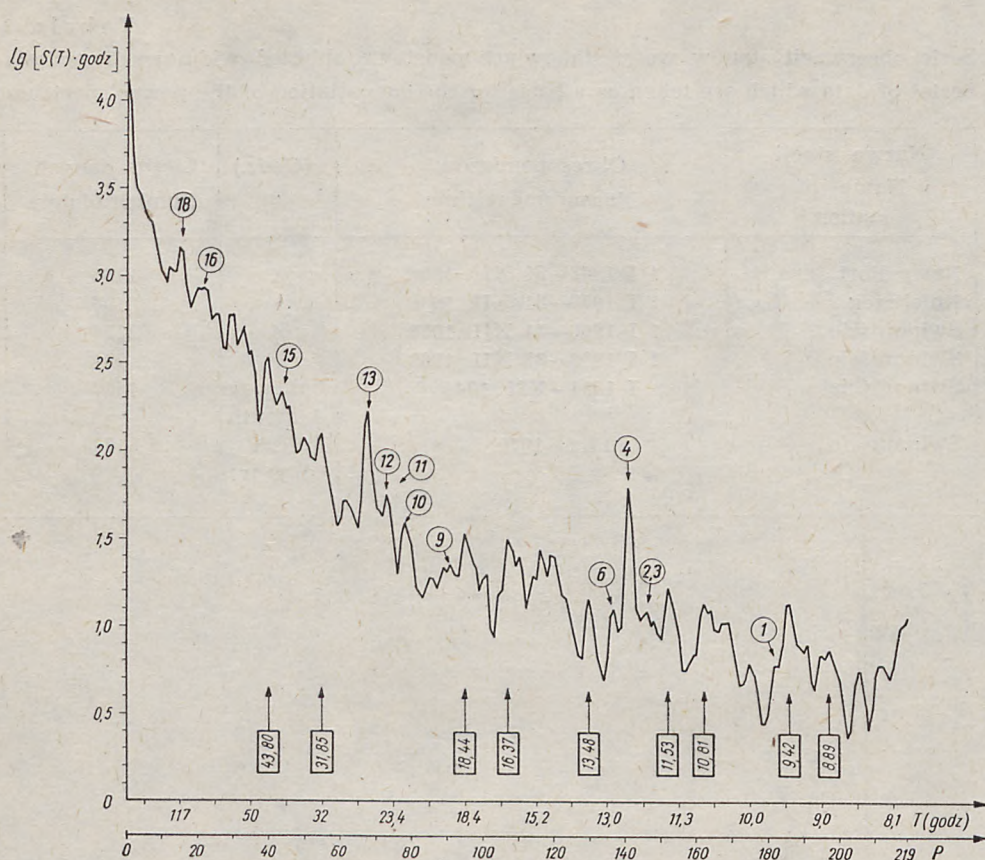
Nazwa stacji Name of station	Okres pomiarów Measurement time	(Godz.) t	Liczba danych Number of data
Nowy Port	1 I 1968—31 XII 1968	4	2196
Kołobrzeg	1 I 1968—31 XII 1968	4	2196
Świnoujście	1 I 1968—31 XII 1968	4	2196
Świnoujście	1 I 1969—31 XII 1969	24	731
Świnoujście	I 1824—XII 1944	1 miesiąc 1 month	1452
Świnoujście	1811—1970	1 rok 1 year	160



Ryc. 48. Widmowa gęstość zmian poziomu morza w Kołobrzegu (1 I—31 XII 1968 r.)

Fig. 48. Power spectrum of water level changes at Kołobrzeg (1.I.—31.XII.1968)





Ryc. 49. Widmowa gęstość zmian poziomu morza w Świnoujściu (1 I—31 XII 1968 r.)  
 Fig. 49. Power spectrum of water level changes at Świnoujście (1.I.—31.XII.1968)

we dane dotyczące serii pomiarów, na których oparto obliczenia, zestawione są w tab. 3.

Obliczenia widmowej gęstości metodą przedstawioną w rozdziale: *Podstawowe równania predykcji prądów...* na podstawie serii pomiarów stanów wody z r. 1968, dało obecny materiał porównawczy charakteryzujący okresowe oscylacje poziomów morza w Nowym Porcie, Kołobrzegu i Świnoujściu. Wyniki obliczeń przedstawiono na ryc. 47, 48, 49.

Przed analizą materiału obliczeniowego celowe jest przedstawienie dotychczas rozpoznanych okresów oscylacji badanego zjawiska. Zestawienie danych w tym zakresie jest zawarte w tab. 4.

Na rycinach 47, 48, 49 występowanie wyżej wymienionych okresów oznaczono cyframi arabskimi oznaczającymi liczbę porządkową danego zjawiska według tab. 4. Okresy nie podane w tabeli oznaczone są strzałkami i podaną w prostokącie wartością okresu.



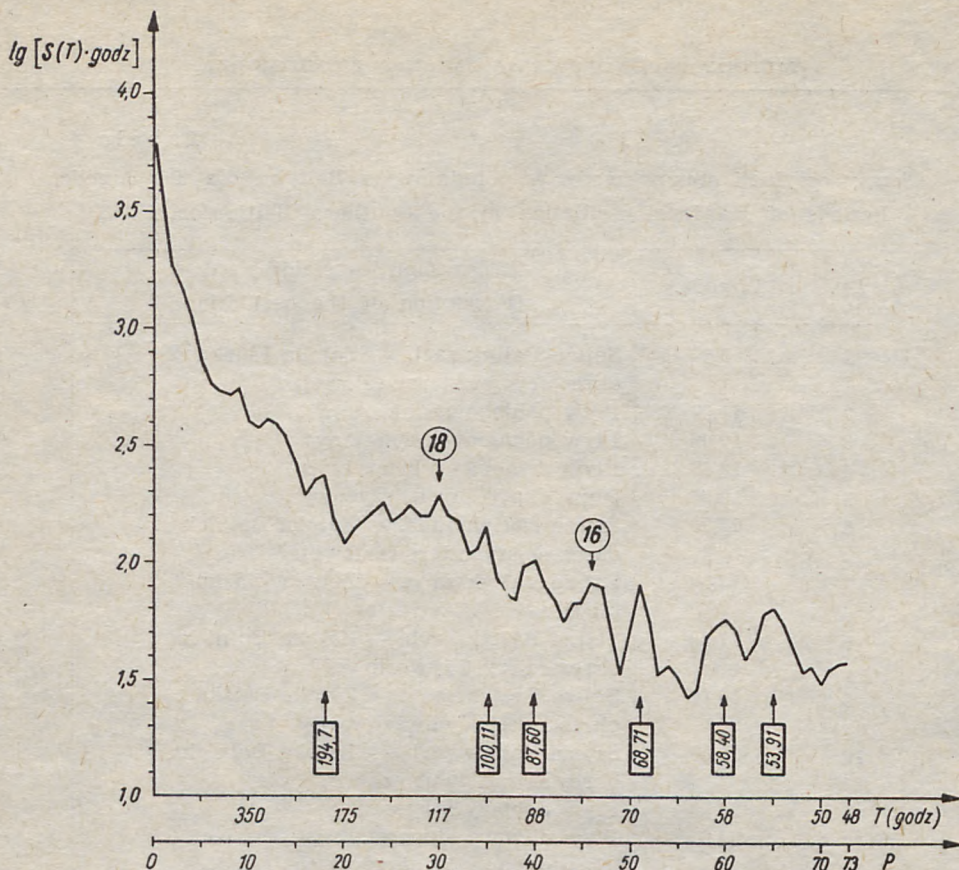
Tabela 4

Okresy oscylacji stanów wody w południowym Bałtyku dla  $T > 8$  godz.  
 Periods of sea level oscillation in the Southern Baltic for  $T > 8^h$

Lp.	T (godz.)	Opis oscylacji Description of the oscillation
1	9,6	Sejsze Bałtyk zach. — Zatoka Fińska okres sejszy czterowęzłowej
2	11,97	Pływ półdobowy mieszany
3	12,00	Pływ półdobowy słoneczny
4	12,42	Pływ półdobowy księżycowy
5	12,66	Pływ eliptyczny księżycowy
6	12,90	Sejsze Bałtyk zach. — Zatoka Botnicka okres sejszy czterowęzłowej
7	13,00	Sejsze Bałtyk zach. — Zatoka Fińska okres sejszy trzywęzłowej
8	17,90	Sejsze Bałtyk zach. — Zatoka Botnicka okres sejszy trzywęzłowej
9	19,10	Sejsze Bałtyk zach. — Zatoka Fińska okres sejszy dwuwęzłowej
10	22,50	Sejsze Bałtyk zach. — Zatoka Botnicka okres sejszy dwuwęzłowej
11	23,90	Pływ dobowy mieszany
12	24,07	Pływ dobowy słoneczny
13	25,82	Pływ dobowy księżycowy
14	27,40	Sejsze Bałtyk zach. — Zatoka Fińska okres sejszy jednowęzłowej
15	39,40	Sejsze Bałtyk zach. — Zatoka Botnicka okres sejszy jednowęzłowej
16	ca 73	Spiętrzenia sztormowe
17	ca 94	Spiętrzenia sztormowe
18	ca 120	Stojące fale wiatrowe

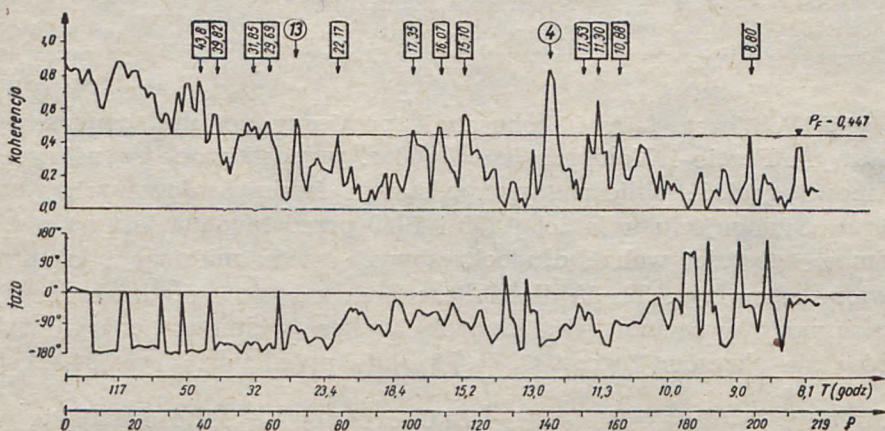
Wyniki obliczeń fazy i koherencji pomiędzy seriami pomiarowymi w Nowym Porcie i Kołobrzegu w 1968 r. przedstawione są na ryc. 51. Widmowa gęstość obliczona na podstawie średnich dobowych stanów wody w Świnoujściu w latach 1968 i 1969 przedstawiona jest na ryc. 50. Widmowe gęstości wahań długookresowych rzędu miesięcy i lat przedstawione są na ryc. 52, 53 dla obliczeń na podstawie średnich rocznych stanów wody w Świnoujściu. Zbiórny wykres widmowej energii wahań stanów dla okresów  $8 \text{ godz.} \leq T \leq 22$  lata przedstawia ryc. 54. Współrzednymi w tym wykresie są  $\frac{1}{T} S(T)$  oraz  $\log \frac{1}{T}$ , które mają tę własność, że zachowane jest pole pod krzywą charakteryzującą energię; bowiem:





Ryc. 50. Widmowa gęstość zmian poziomu morza w Świnoujściu na podstawie średnich dobowych w latach 1968—1969

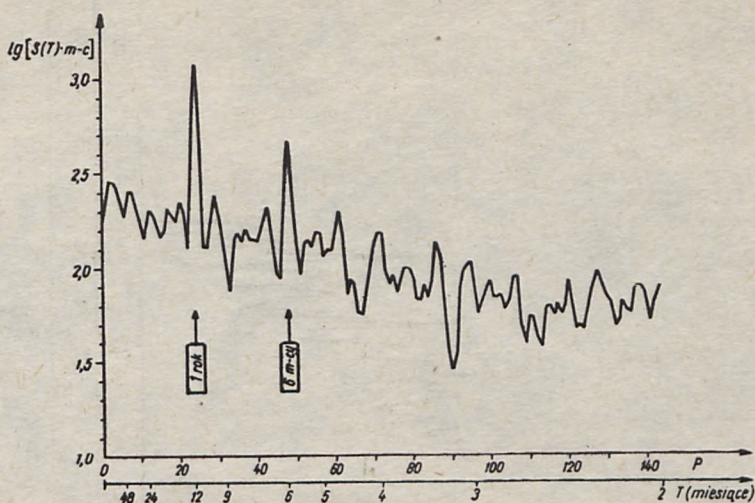
Fig. 50. Power spectrum of the water level changes at Świnoujście based on daily means for 1968 and 1969



Ryc. 51. Faza i koherencja na podstawie zmian poziomów morza w Nowym Porcie i Kołobrzegu w r. 1968

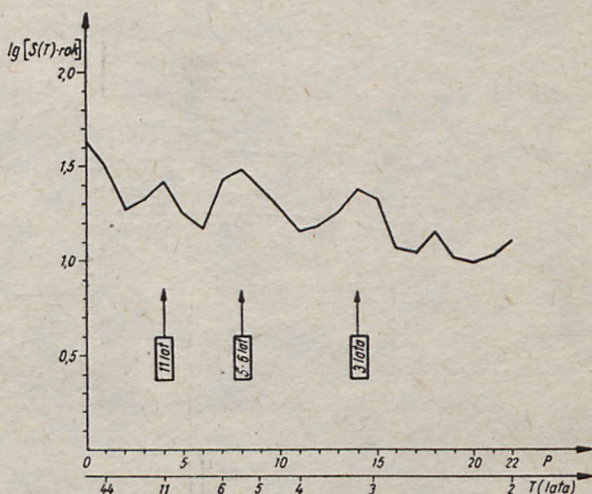
Fig. 51. Phase and coherence of water level changes at Nowy Port and Kołobrzeg in 1968





Ryc. 52. Widmowa gęstość zmian poziomu morza w Świnoujściu na podstawie średnich miesięcznych

Fig. 52. Power spectrum of water level changes at Świnoujście based on monthly means



Ryc. 53. Widmowa gęstość zmian poziomu morza w Świnoujściu na podstawie średnich rocznych w okresie 1811—1970

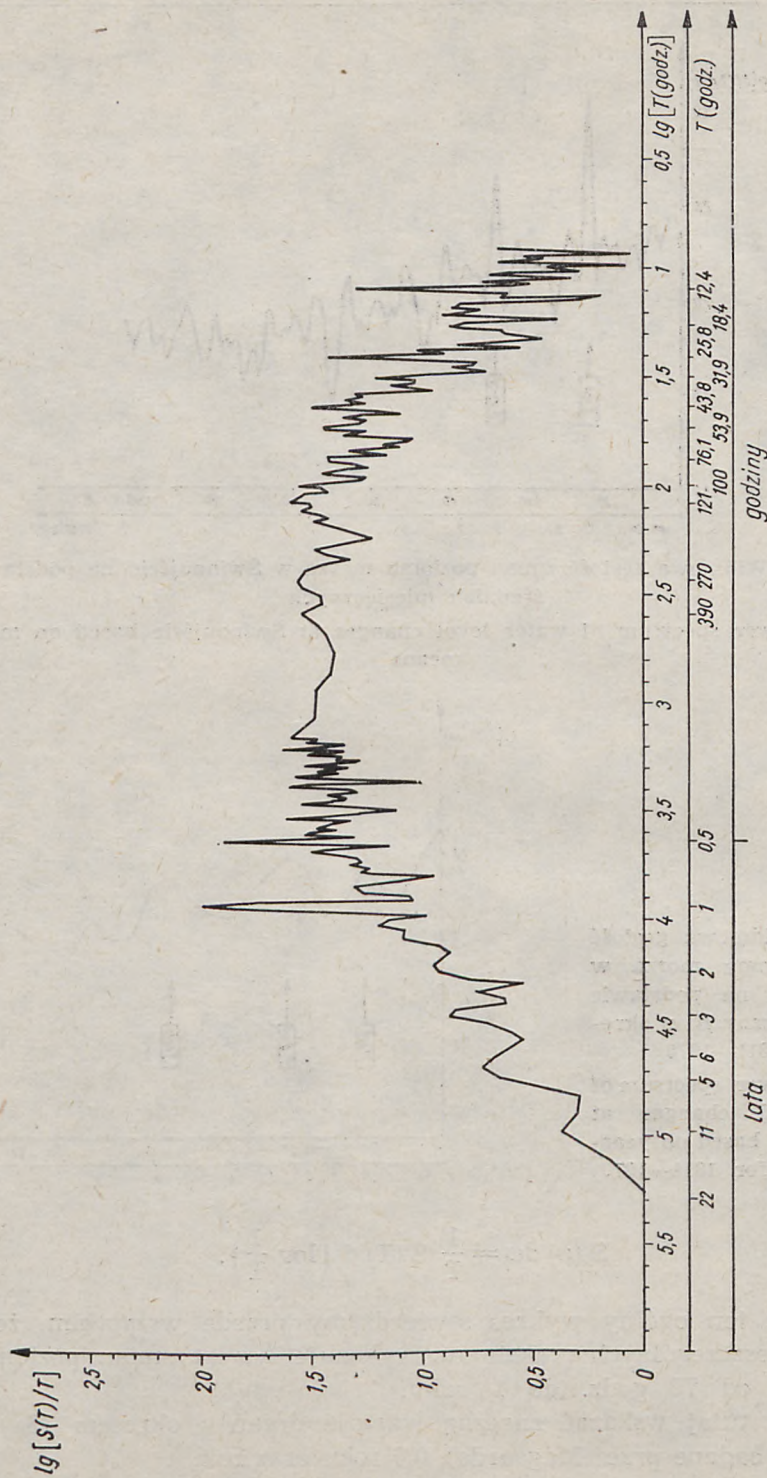
Fig. 53. Power spectrum of water level changes at Świnoujście based on yearly means for 1811—1970

$$S(\omega) d\omega = \frac{1}{T} S(T) d\left(\log \frac{1}{T}\right).$$

Analizując ten ogólny wykres stwierdzamy przede wszystkim, że obwiednia poszczególnych maksimów wykazuje wzrost zmian poziomu w przedziale od 70 godz. do 1 roku.

Możemy tutaj wskazać znaczną wartość drgań z okresem 73 godz., 120 godz. (badane przez Magaarda), 0,5 roku oraz rok.





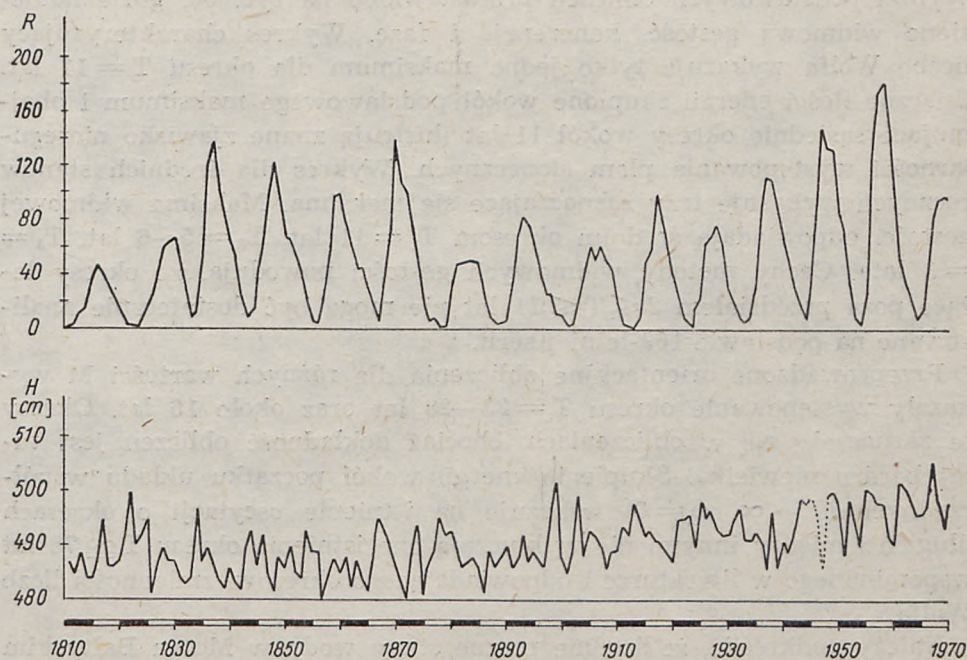
Ryc. 54. Widmowa gęstość zmian poziomów morza w Świnoujściu w przedziale 0,5 godz. — 22 lat  
 Fig. 54. Power spectrum of water level changes at Świnoujście covering periods from 0.5 hour to 22 years



### 11.1. Długookresowe oscylacje średnich rocznych stanów wody Morza Bałtyckiego

Badania długookresowych wahań nie są tak zaawansowane, jak analiza oscylacji o okresach krótszych. Wynika to przede wszystkim stąd, że notowania stanów wody w morzu zazwyczaj nie przekraczają kilkunastu lat, co powoduje brak możliwości dokładnego wydzielenia zmian długookresowych. Morze Bałtyckie jest jednak jednym z najlepiej poznanych akwenów w oceanografii światowej, charakteryzowanym przez wyjątkowo długie serie obserwacji wodowskazowych. Jedną z takich serii obejmującą okres notowań 1811—1970 w Świnoujściu przyjmujemy za podstawę dalszych obliczeń. Równoległe dla zbadania zależności od zjawisk atmosferycznych wykorzystano obserwacje liczb Wolfa wykazujących aktywność słoneczną w zależności od powierzchni plam słonecznych. Dane dotyczące liczb Wolfa zostały pobrane z opublikowanych wyników obserwacji Mergentalera (1958).

Średnie stany wody z lat 1811—1970 oraz liczby Wolfa przedstawione zostały na ryc. 55. Zanim przystąpiono do obliczeń, stwierdzono za



Ryc. 55. Średnie roczne liczby Wolfa (R) oraz średnie roczne stany wody (H) w Świnoujściu w okresie 1811—1970

Fig. 55. The occurrence of annual mean sea levels at Świnoujście and the average annual Wolf numbers for the 1811—1970 observation period



pomocą testu trendu (Bendat i Piersol) odchylenie od warunków stacjonarności. Wyniki obliczeń testowych zgadzały się ze znanym zjawiskiem stopniowego obniżania się wybrzeża w rejonie Świnoujścia oraz tendencją podnoszenia się poziomu Bałtyku od lat siedemdziesiątych XIX wieku, którą Łazarenko (1961) szacował na 2,5 cm/100 lat. Średnią wielkość trendu obliczono, stosując wzór:

$$\alpha_{\xi} = \frac{1}{(Tr/3)(2Tr/3)} \int_{2Tr/3}^{Tr} \xi(t) dt - \int_0^{Tr/3} \xi(t) dt, \quad (3.85)$$

gdzie:  $\alpha_{\xi}$  — średnia wielkość trendu,  $Tr$  — zakres czasowy serii pomiarowej,  $\xi(t)$  — dane pomiarowe w funkcji czasu.

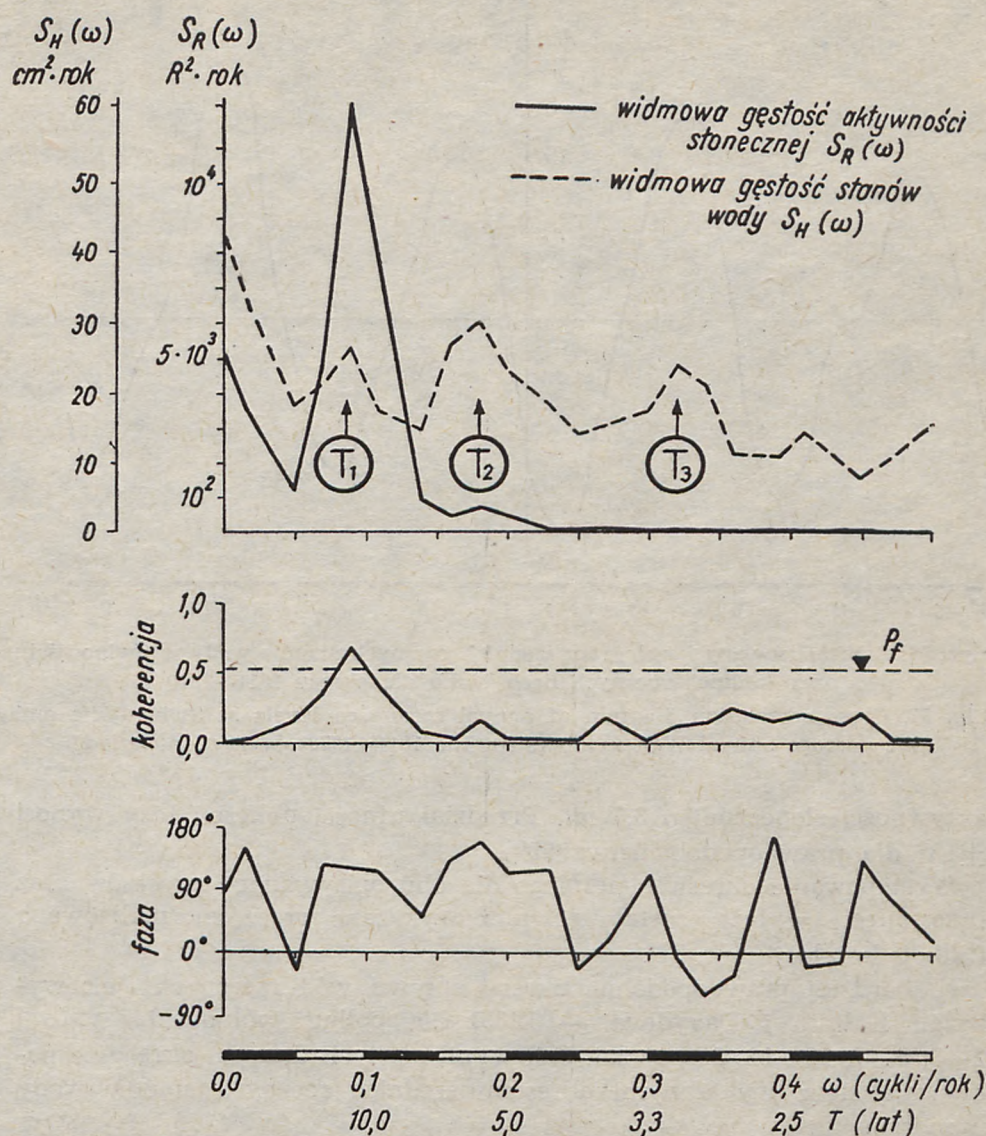
Przeprowadzone obliczenie wykazało, że średnia wielkość trendu wynosi 0,07 cm/rok. Wprowadzenie do serii pomiarowej poprawki obliczanej wzorem (3.85) spowodowało usunięcie trendu liniowego i dobre wyniki testów stacjonarności.

Obliczenia widmowej gęstości wykonano na podstawie metody przedstawionej w rozdziale: *Podstawowe równania predykcji prądów...* Wyniki podstawowych obliczeń przedstawiono na ryc. 56, gdzie naniesiono widmową gęstość, koherencję i fazę. Wykres charakteryzujący liczbę Wolfa wykazuje tylko jedno maksimum dla okresu  $T = 11$  lat. Znaczne ilości energii skupione wokół podstawowego maksimum i obejmujące sąsiednie okresy wokół 11 lat ilustrują znane zjawisko nieregularności występowania plam słonecznych. Wykres dla średnich stanów rocznych wykazuje trzy zaznaczające się maksima. Maksima widmowej gęstości odpowiadają średnim okresom  $T_1 = 11$  lat,  $T_2 = 5-6$  lat,  $T_3 = 3$  lata. Cechy metody widmowych gęstości powodują, że okresy leżące poza przedziałem  $2 \leq T \leq 11$  lat nie mogą być dostatecznie analizowane na podstawie 169-letniej serii.

Przeprowadzone orientacyjne obliczenia dla różnych wartości  $M$  wykazały występowanie okresu  $T = 23-28$  lat oraz około 16 lat. Okresy te zaznaczały się w obliczeniach, chociaż dokładność obliczeń jest tutaj bardzo niewielka. Skupienie energii wokół początku układu współrzędnych ( $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega = 0$ ) wskazuje na istnienie oscylacji o okresach długich i między innymi nie wykluczają one istnienia okresu  $T \cong 78$  lat wspomnianego w literaturze i odpowiadającego okresowi zmienności liczb Wolfa.

Należy podkreślić, że średnie roczne stany wody w Morzu Bałtyckim zależą przede wszystkim od intensywności cyrkulacji atmosferycznej nad północnym Atlantykiem, Morzem Północnym i Morzem Bałtyckim, spływu wód lądowych do basenu bałtyckiego, wahań eustatycznych oceanu światowego oraz zmian gęstości wody morskiej.



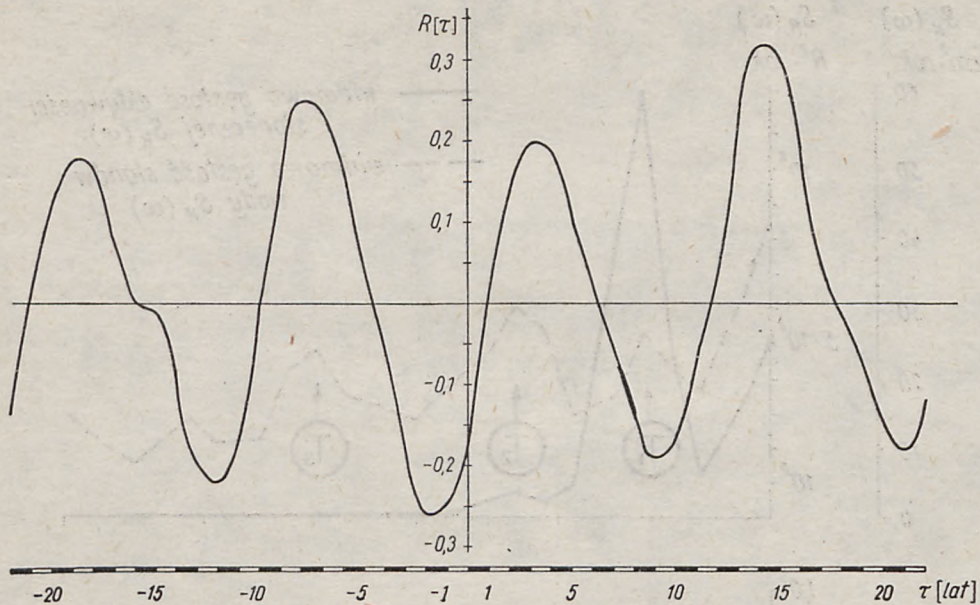


Ryc. 56. Widmowa gęstość, koherencja i faza średnich rocznych poziomów morza w Świnoujściu oraz średnich rocznych liczb Wolfa dla okresu 1811—1970

Fig. 56. Power spectrum, coherence and phase of annual mean sea levels at Świnoujście and average annual Wolf numbers for the period 1811—1970

Wykazany okres 11-letni jest związany z cyklami aktywności słonecznej. Zależność ta jest udowodniona przez wyniki obliczeń koherencji. Wartość koherencji wynosi 0,66, przy poziomie ufności 0,52. Obliczenia fazy wykazały, że średnie roczne stany wody wyprzedzają zmiany





Ryc. 57. Znormalizowany korelogram średnich rocznych stanów wody w Świnoujściu oraz średnich rocznych liczb Wolfa dla okresu 1811—1970

Fig. 57. Cross correlation diagram of annual mean sea levels at Swinoujście and the average annual Wolf numbers for the 1811—1970 observation period

aktywności słonecznej o 3,7 lat. Przedział ufności obliczeń fazy wynosi  $\pm 13^\circ$  dla prawdopodobieństwa 95<sup>0</sup>/<sub>0</sub>.

Występowanie okresu 11-letniego dla obu opisywanych procesów oraz przesunięcie w fazie zostały również wykazane przez znormalizowaną funkcję korelacji (ryc. 57).

Najbardziej prawdopodobne okresy spływu wód rzecznych (jak wykazali Kalinin i Dawydova — 1968) dla półkuli północnej wynoszą 2—3, 5—7, 10—12, 25—28 lat. Jak wynika z tych danych, okresy te pokrywają się z wykazanymi okresami średnich rocznych stanów wody w morzu.

Badania dotyczące makroprocesów wzajemnego oddziaływania morza i atmosfery (Duvanin — 1968) wykazują istnienie okresów 2—3, 4 lat oraz 4—7 lat. Z przytoczonych badań oraz na podstawie licznych obserwacji i wykonanych obliczeń można wnioskować, że cykliczność średnich rocznych stanów wody jest wynikiem wahań makroskopowych układu morze — atmosfera, przy czym dla okresu 11-letniego wahania te są niewątpliwie spowodowane zmianami aktywności słonecznej. Dalsze badania winny wykazać, w jakim stopniu długookresowe zmiany uzależnione są bezpośrednio od czynników atmosferycznych oraz w jakiej



mierze występuje pośredni wpływ atmosfery poprzez spływ wód lądowych do basenu morskiego.

Na zakończenie przedyskutujemy zagadnienie związane z przebiegiem widmowej gęstości przy częstości drgań  $\omega \rightarrow 0$ . Obserwując wykresy widmowej gęstości zauważamy, że zazwyczaj  $S(\omega)$  kiedy  $\omega \rightarrow 0$  przyjmuje znaczne wartości. Jest oczywiste, że te znaczne wartości nie odnoszą się do  $\omega = 0$ , lecz do przedziału częstości leżącego wokół  $\omega = 0$ . Najbliższą  $\omega = 0$  częstość, dla której widmowa gęstość została obliczona oznaczmy  $\omega_0$ . Z wyrażenia (1.32) wiemy, że widmowa gęstość równa jest:

$$S_T(\omega) = \frac{T}{\pi} |a_T(\omega)|^2,$$

zaś

$$a_T(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u_T(t) dt.$$

Kiedy  $\omega \rightarrow 0$ , mamy:

$$a_T(0) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} U_T(t) dt \quad (3.86)$$

oraz

$$S_T(0) = \frac{T}{\pi} \left| \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} U_T(t) dt \right|^2 \quad (3.87)$$

Z powyższego wynika i jest oczywiste, że  $S_T(0) = 0$ , gdy

$$\frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} U_T(t) dt = 0,$$

tzn. kiedy średnia wartość funkcji  $U_T(t)$  jest równa zero. Ten przypadek może zachodzić dla zmian typu losowego. W przypadku obliczeń numerycznych mamy do czynienia nie z częstością  $\omega = 0$ , lecz z przedziałem  $0 \leq \omega \leq \omega_0$ , stąd też istnienie znacznych wartości widmowej gęstości około częstości  $\omega = 0$ , oznacza tylko to, że wartości widmowej gęstości zostały zsumowane w przedziale częstości  $0 \leq \omega \leq \omega_0$  i przyjęte jako  $S(\omega = 0)$ , a zatem nie mają one wiele wspólnego z prawdziwą wartością  $S(\omega = 0)$ .



Z. KOWALIK

Polish Academy of Sciences Institute of Geophysics — Sopot

## PREDICTION METHODS OF WATER LEVEL VARIATIONS AND WIND GENERATED CURRENTS

### Summary

The main interest in this paper is focused on presenting the prediction methods for describing and evaluating the wind currents and storm surges in shallow seas.

Chapter I gives the methods of prediction:

- a) by means of hydrodynamical equations and
- b) by stochastic methods.

The general system of hydrodynamic equations (1.1, ... 1.3) has been transformed by means of dimensional analysis into equations (1.6, ... 1.8), which are characteristic for currents in shallow seas, and into equations (1.12, 1.13, 1.21) depicting mass transport and serving for prediction of storm surges.

In the second part of Chapter I, the linear transformations of random functions are introduced. Among other the transfer functions of linear system  $p(t)$ , when a random process  $x(t)$  acts at the input and  $y(t)$  at the output — the equation (1.39) — Fig. 1 — is shown.

A more complicated situation is shown in Fig. 2, where we notice  $N$  processes at the input. The paper describes the situations, when at the input of the mechanical system there are two processes (wind and pressure) and at the output — one process, the variations of sea level.

The equation (1.49) describes a general case. Fourier transform of this equation (1.52) is used to derive the equation of power spectrum of the output process  $S_Y$  — equation (1.53). The special case of two variables at the input ( $x_1$  and  $x_2$ ) is presented the system of equations (1.58a, 1.58b).

After having determined the basic equations and methods, the author proceeds to the solution of special problems. Chapter II deals with steady wind driven currents in shallow seas (islands included). Ekman type equations (2.2—2.3) contain an unknown value  $\xi$  — disturbance in height of the free surface from its undisturbed level. In order to determine this value, the equations of mass transport (2.7, 2.8) have been formulated, and further, by using the continuity equation (2.10), the stream function  $\Psi$  has been introduced, and the mass transport equations have been compressed into one equation (2.12) with the boundary condition (2.13).

If there are islands in the sea, the area of integration for the equation (2.12) is no longer simply connected and the additional boundary conditions are introduced with the help of equations (2.23).

After the general problem is determined, the author deals in Chapter II paragraph 6, with the analysis of simplified models: constant depth sea — para. 6.1, varying depth sea — para. 6.2, sea with an island — para. 6.3. This Chapter also considers some problems relating to the convergence of iteration method introduced in order to solve the equation (2.12).

Para. 7 presents the calculation of wind driven currents in the Baltic Sea with two islands: Gotland and Bornholm. The results of calculations in the form of



isolines of stream function for the wind W 10 m/sec are shown in Fig. 13 and the distribution of surface currents — in Fig. 14. Similar characteristics are shown in Figs. 16 and 17 for the wind N, 10 m/sec. The characteristic gyres in the lines of the stream function — Figs. 13 and 16 — are the result of coupling the wind stress ( $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ) and the bottom slope  $\frac{\delta_H}{\delta_x}$ ,  $\frac{\delta_H}{\delta_y}$ . The currents in the Baltic were calculated with

a grid size of 10 nautical miles and a similar method was used for the calculation of Gdańsk Bay currents with a grid size of 1 nautical mile, while the interpolated value of stream functions on the boundary between the Baltic and Gdańsk Bay was adopted from the previously obtained model.

The problem of approximation of differential equations by finite differences and the convergence of iteration methods used were dealt with in para. 9, where attention was also paid to the occurrence of the so-called "numerical friction" as a result of an insufficient approximation.

At the end of Chapter II, the paper contains some results of current speed measurements in the Gotland Deep, and in the power spectrum process (Fig. 30) one can notice the main maximum the period of about 14.5 hours, equal to the inertial period.

In Chapter III, the method of forecasts of sea level changes are presented. The basic equations (3.1), (3.2) and (3.3), which are characteristic for the non-steady flows, require a special approach for numerical solution and to this aim para. 4 determines the problems of numerical approximation, and para. 5 and 6 — the stability of numerical solutions, first of one equation and then of a system of equations. Non-periodical level changes of the Baltic have been shown with numerical methods and the results are presented in Fig. 39.

In para. 8 one can find methods of examining non-periodical sea level changes by of stochastic methods from Chapter II. Para. 9 and subsequent deal with periodical level changes of the Baltic in an interval of 0.5 hour for 22 years. The summing-up figure of power spectrum (Fig. 54), enables us to observe the basic changes over periods of 11 years, 6 years, 3 years, 1 year, 0.5 year, 120 hours, 73 hours.

## LITERATURA

### REFERENCES

- Bendat J.S., Piersol A.G. (1966), *Measurement and analysis of random data*, New York.
- Birkhoff G. (1950), *Hydrodynamics*, Princeton.
- Blackman R., Tuckey J. (1958), *The measurement of power spectra from the point of view of the communication engineer*, Bell System Techn. Jour., 37.
- Collatz L. (1955), *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Berlin.
- Druet C., Kowalik Z. (1971), *Dynamika morza*, Gdańsk.
- Duvanin A.I. (1968), *O modieli wzaimodiejstwija mieźdu makroprocesami w okieanie i atmosfierie*, Okieanologija, VIII, 4.
- Ekman V.W. (1905), *On the influence of the Earth's rotation on ocean currents*, Arkiv för Mat. Ast. och Fysik, 2, 11.



- Ekman V.W. (1932), *Über Horizontalzirkulation bei winderzeugeten Meeresströmungen*, Arkiv för Mat. Ast. och Fysik, 17, 26.
- Faddeeva V.N. (1959), *Computational methods of linear algebra*, New York, Dover Publ.
- Felzenbaum A.I. (1960), *Teoreticzeskije osnovy i metody rasczeta ustanowiszichsia tieczenij*, Izd. ANSSSR, Moskwa.
- Fischer G. (1959), *Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren Tellus*, XI, 1.
- Garner D.M. et al. (1962), *Proc. of the Symposium on Math.-Hydrod.*, Methods in Physical Oceanogr., Hamburg.
- Gumbel E.J. (1954), *Statistical theory of droughts*, Proc. Amer. Soc. of Civil Engineers, 80.
- Gustafson T., Kulenberg B. (1936), *Untersuchungen von Trägheitsströmungen in der Ostsee*, Sven. Hydr.-Biol. Komm. Skr. Ny. Ser. Hydr., 13.
- Hansen W. (1956), *Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen*, Tellus, 8, 2.
- Iljin A.M. (1969), *Raznostnaja schema dla diffierencialnogo urawnienija s małym paramietrom pri starszej proizwodnoj*, Matematyczskije zamietki, 6, 2.
- Kac A.M. (1956), *Elasticity theory*, Moscov.
- Kaczmarek Z. (1970), *Metody statystyczne w hydrologii i meteorologii*, Wyd. Kom. i Łączności, Warszawa.
- Kalinin G.P., Davydova A.J. (1968), *Probiemy riecznogo stoka*, Moskwa 1968.
- Kamenkovitch W.M. (1961), *Ob integrirowani urawnenij teorii morskich tieczenij w nieodnoswiaznych oblastiach*, Dok. ANSSSR, CXXXVIII, 5.
- Kowalik Z. (1965), *Przegląd metod obliczania stacjonarnych prądów wiatrowych*, Przegląd Geof., X (XVIII), 3÷4.
- Kowalik Z. (1966), *Wpływ uwarstwienia mas wodnych na procesy dynamiczne w Bałtyku*, Acta Geoph. Polon., XIV, 4.
- Kowalik Z. (1967a), *Metody widmowych rozkładów na przykładzie prędkości prądów w morzu*, Acta Geoph. Polon., XV, 1.
- Kowalik Z. (1968a), *Power spectra and numerical calculations of the Gdańsk bay seiches*, Acta Geoph. Polon., XVI, 3.
- Kowalik Z. (1968b), *Metody rozkładów energii na przykładzie zmienności niektórych parametrów w morzu*, Rozprawy Hydrot., 22.
- Kowalik Z. (1969), *Wind-driven circulation in a shallow sea with application to the Baltic Sea*, Acta Geoph. Polon., XVII, 1.
- Kowalik Z. (1970), *Ustalone prądy wiatrowe w płytkich morzach z zastosowaniem do Morza Bałtyckiego — II*, Przegląd Geof., XV (XXIII), 2.
- Kowalik Z., Taranowska S. (1967b), *Horizontal large-scale turbulence in the Baltic Sea*, Cahiers Océanographiques XIX, 4.
- Kowalik Z., Taranowska S. (1974), *Prądy gęstościowe w Morzu Bałtyckim*, Oceanologia, z. 3 (w druku).
- Kowalik Z., Wróblewski A. (1971), *Ustalone prądy wiatrowe Zatoki Gdańskiej*, Acta Geoph. Polon., XIX, 2.
- Kowalik Z., Wróblewski A. (1973), *Okresowe wahania stanów wody przy polskich wybrzeżach południowego Bałtyku*, Arch. Hydrot., XX, 2.
- Kowalik Z., Wróblewski A. (1973), *Long term oscillations of annual mean sea level in the Baltic on the basis of observations carried out in Swinoujście from 1811 to 1970*, Acta Geoph. Polon., XXI, 1.



- Laska M. (1967), *Wahania poziomu wód Morza Bałtyckiego oraz metody ich wyznaczania*, Biblioteka Zakładu Oceanologii, Sopot.
- Lauwerier H.A. (1962), *Proc. of the Symposium on Math. Hydrod.*, Methods in Physical Oceanogr., Hamburg.
- Lazarenko N.N. (1961), *Kolebanija urownia Baltijskogo Moria*, Trudy GOIN, 65.
- Magaard L., Krauss (1966), *Spektren der Wasserstandsschwangungen der Ostsee im Jahre 1958*, Kieler Meeresforschungen, Bd. XXII, 2.
- Maliński J. (1973), *Hydrodynamiczny model płytkiej, wieloprzewodowej cieśniny morskiej, cz. I. Podstawy teoretyczne*, Arch. Hydrod., XX, 2.
- Mergentaler J. (1958), *Słońce*, Warszawa.
- Neumann G. (1944), *Sieches der Putziger Bucht*, Annalen der Hydrographie VIII/IX.
- Neumann G. (1958), *On the mass transport of wind driven currents in a baroclinic ocean with application to the North Atlantic*, Zeit. für Meteorol., 12.
- Platzman G. (1958), *A numerical computation of the surge on 26 June 1954 on Lake Michigan*, Geophysical 5, 3/4.
- Priwalskij W.E. (1968), *Wynuzdiennyje kolebanija urownia jużnoj Baltiki i ich swiaz z izmieniniejami atmosfornogo dawlenija i wietra*, Fizika Atm. i Okieana IV, 10.
- Richtmayer R.D. (1957), *Difference methods for initial—value—problems*, Interscience Pub., New York.
- Saint-Guily B. (1959), *Sur la solution du problème d'Ekman D.H.Z.*, 12, 6.
- Saint-Guily B. (1962), *Proc. of the Symposium on Math.-Hydrod.*, Methods in Physical Oceanogr., Hamburg.
- Sarkisjan A.S. (1966), *Osnowy teorii i rasczot okieaniczeskich tieczenij*, Gidrometizdat, Leningrad.
- Svansson A. (1959), *Some computations of water heights and currents in the Baltic*, XI, 2.
- Smith G.H. (1965), *Numerical solution of partial differential equations*. Oxf. Univ. Press., N. Y. and London.
- Stockmann V.B. (1966), *Kaczestwiennyj analiz priczin anomalnoj cirkulaczi wokrug okeaniczeskich ostrowow* Fizika Moria i Okeana, II, 11.
- Stommel H. (1948), *The westward intensification of wind-driven ocean currents*, Trans. A.G.U., 29, 2.
- Swieszniukov A.A. (1965), *Podstawowe metody funkcji losowych*, Warszawa.
- Szymborski S. (1955), *Gdańsk Bay Seiches*, Arch. Hydrot., II, 2.
- Usitalo S. (1962), *Proc. of the Symposium on Math. Hydrod.*, Methods in Physical Oceanogr., Hamburg.
- Welander P. (1957), *Wind action on a shallow sea: some generalizations of the Ekman theory*, Tellus, 9.
- Wilkinson J.H. (1965), *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Pres, Oxford.
- Wilson B.W. (1960), *Note on surface wind stress over water at low and high wind speeds*, Journ. of Geoph. Research, 65, 10.
- Wróblewski A. (1970), *Występowanie minimalnych rocznych stanów wody w południowym Bałtyku*, Przegląd Geograficzny, XV, XXIII, 1.